

## Pastaba apie Lerch'o dzeta funkcijos nulius

Ramūnas GARUNŠKTIS (VU)

el. paštas: ramunas.garunkstis@maf.vu.lt

### 1. Įvadas

Tegu  $s = \sigma + it$  yra kompleksinis kintamasis. Lerch'o dzeta funkcija  $L(\lambda, \alpha, s)$ , kai  $\sigma > 1$ , apibrėžiama Dirichlet eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s},$$

kur  $0 < \lambda, \alpha \leq 1$ . Ši funkcija pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, gal būt išskyrus tašką  $s = 1$ , ir, kai  $\lambda$  nėra sveikasis skaičius, tenkina funkcinę lygtį

$$L(\lambda, \alpha, 1 - s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left( \exp \left\{ \frac{\pi i s}{2} - 2\pi \alpha \lambda \right\} L(-\alpha, \lambda, s) \right. \\ \left. + \exp \left\{ -\frac{\pi i s}{2} + 2\pi \alpha (1 - \lambda) \right\} L(\alpha, 1 - \lambda, s) \right). \quad (1)$$

Lerch'o dzeta funkcijos laisvos nuo nulių sritys buvo nagrinėtos darbuose [1] ir [2]. Šio darbo tikslas yra patikslinti šias sritis. Tegu  $l$  yra tiesė kompleksinėje plokštumoje  $C$ ,  $\varrho(s, l)$  yra taško  $s$  atstumas iki  $l$ , ir apibrėžkime

$$L_\epsilon(l) := \{s \in C : \varrho(s, l) < \epsilon\},$$

čia  $\epsilon > 0$ . Darbe [1] buvo įrodyta

**1 teorema.** Tegu  $0 < \lambda < 1$  ir  $\lambda \neq 1/2$ . Tuomet egzistuoja konstantos  $\sigma_0 \leq 0$  ir  $\epsilon_0 > 0$  tokios, kad  $L(\lambda, \alpha, s) \neq 0$ , kai  $\sigma < \sigma_0$  ir

$$s \notin L_{\epsilon_0} \left( \sigma = \frac{\pi t}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}} + 1 \right).$$

Mes surasime konkrečias  $\sigma_0$  ir  $\epsilon_0$  reikšmes.

**2 teorema.** 1 teoremoje galima imti  $\sigma_0 = -2$  ir  $\epsilon_0 = \frac{\log 2}{\pi}$ .

Pastebėsime, kad atvejis  $\lambda = 1$  išnagrinėtas straipsnyje [2], o atvejis  $\lambda = 1/2$  – straipsnyje [1].

## 2. 2 teoremos įrodymas

Mums bus naudinga

**1 lema.** Tegu  $0 < \lambda < 1/2$  ir  $\sigma \leq -2$ . Tada

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma-1} + \left( \frac{1-\lambda+m}{1-\lambda} \right)^{\sigma-1} \right) < \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Įrodymas Įvertinę sumą integralu, gauname kad kairė nelygybės (2) pusė yra mažesnė už

$$\left( \frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^{\sigma-1} + \left( \frac{2-\lambda}{1-\lambda} \right)^{\sigma-1} + \int_1^{\infty} \left( \frac{\lambda+x}{\lambda} \right)^{\sigma-1} dx + \int_1^{\infty} \left( \frac{1-\lambda+x}{1-\lambda} \right)^{\sigma-1} dx.$$

Suintegravę ir pasinaudoję nelygybėmis

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} < \frac{1}{3}, \quad \frac{1-\lambda}{2-\lambda} < \frac{1}{2},$$

kai  $0 < \lambda < 1/2$ , gauname lemos tvirtinimą.

*1 teoremos įrodymas.* Kai  $\sigma < 0$ , tai iš funkcinės lygties (1) gauname

$$\begin{aligned} L(\lambda, \alpha, s) = & \Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1} e^{-2\pi i \lambda \alpha} \left( e^{\frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \alpha m}}{(\lambda+m)^{1-s}} \right. \\ & \left. + e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)+2\pi i \alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{(1-\lambda+m)^{1-s}} \right). \end{aligned}$$

Iš pradžių įrodysime teoremą atveju  $\lambda < 1/2$ . Turime

$$\begin{aligned} & \left| e^{\frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \alpha m}}{(\lambda+m)^{1-s}} + e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)+2\pi i \alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{(1-\lambda+m)^{1-s}} \right| \\ & \geq e^{\frac{\pi t}{2} \lambda^{\sigma-1}} - e^{-\frac{\pi t}{2} (1-\lambda)^{\sigma-1}} - \sum_{m=1}^{\infty} \left( e^{\frac{\pi t}{2} (\lambda+m)^{\sigma-1}} + e^{-\frac{\pi t}{2} (1-\lambda+m)^{\sigma-1}} \right) \\ & \geq e^{\frac{\pi t}{2} \lambda^{\sigma-1}} \left( 1 - e^{-\pi t} e^{(\sigma-1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda}} - \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + e^{-\pi t} \left( \frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Tegu taškas  $s_1 = \sigma_1 + it_1$ ,  $\sigma_1 < 0$ , yra virš tiesės

$$l: \sigma = \frac{\pi t}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}} + 1,$$

t.y.

$$\sigma_1 \leq \frac{\pi t_1}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}} + 1, \quad \sigma_1 < 0.$$

Tuomet

$$-\pi t_1 \leq (1 - \sigma_1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \quad (3)$$

ir

$$\begin{aligned} F_1(s_1) &:= \exp \left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1-1} + e^{-\pi t_1} \left( \frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1-1} \right) \\ &\leq \exp \left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1-1} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^{1-\sigma_1} \left( \frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1-1} \right) \\ &= \exp \left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1-1} + \left( \frac{1-\lambda+m}{1-\lambda} \right)^{\sigma_1-1} \right). \end{aligned}$$

Dabar parinksime  $s_1$  taip, kad būtų patenkintos nelygybės (3) ir  $F_1(s_1) < 1$ . Pasinaudoję 1 lema gauname, kad tinkama reikšmė yra

$$s_1 = -2 - i \left( \frac{3}{\pi} \log \frac{1-\lambda}{\lambda} - \frac{\log 2}{\pi} \right).$$

Dabar tegu

$$A(s_1) := \left\{ s \in C: \sigma \leq \sigma_1, \sigma - \sigma_1 \leq \frac{\pi(t-t_1)}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}} \right\},$$

t.y. sritis  $A(s_1)$  yra virš tiesės

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{\pi(t-t_1)}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

ir kairiau tiesės  $\sigma = \sigma_1$ . Jei  $s = \sigma + it \in A(s_1)$ , tai

$$F_1(s) = \exp \left\{ -\pi t + (\sigma - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma-1} + e^{-\pi t} \left( \frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma-1} \right) \\
\leq & \exp \left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1-1} \right. \\
& \left. + \left( \frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^{\sigma_1-\sigma} e^{-\pi t_1} \left( \frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma-1} \right) \\
= & \exp \left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1-1} \right. \\
& \left. + e^{-\pi t_1} \left( \frac{1-\lambda+m}{1-\lambda} \right)^{\sigma} \left( \frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^{\sigma_1} \left( \frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{-1} \right) \\
\leq & \exp \left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1-1} \right. \\
& \left. + e^{-\pi t_1} \left( \frac{1-\lambda+m}{1-\lambda} \right)^{\sigma_1} \left( \frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^{\sigma_1} \left( \frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{-1} \right) = F_1(s_1).
\end{aligned}$$

Kadangi  $\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1} \neq 0$  srityje  $A(s_1)$ , tai iš pastarųjų samprotavimų gauname, kad  $L(\lambda, \alpha, s) \neq 0$  kai  $s \in A(s_1)$ .

Dabar nagrinėsime sritį esančią žemiau tiesės  $l$  ir kairiau menamosios ašies. Tegu

$$\begin{aligned}
F_2(s) := & \exp \left\{ \pi t - (\sigma - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left( e^{\pi t} \left( \frac{\lambda+m}{1-\lambda} \right)^{\sigma-1} + \left( \frac{1-\lambda+m}{1-\lambda} \right)^{\sigma-1} \right).
\end{aligned}$$

Tada, kai  $\sigma < 0$ , turime

$$\begin{aligned}
& \left| \exp \left\{ \frac{\pi i}{2} (1-s) \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i a m}}{(\lambda+m)^{1-s}} \exp \left\{ -\frac{\pi i}{2} (1-s) + 2\pi i \alpha \right\} \right. \\
& \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i a m}}{(1-\lambda+m)^{1-s}} \left. \right| \geq e^{-\frac{\pi t}{2}} (1-\lambda)^{\sigma-1} - e^{\frac{\pi t}{2}} \lambda^{\sigma-1} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} (e^{\frac{\pi t}{2}} (\lambda+m)^{\sigma-1} + e^{-\frac{\pi t}{2}} (1-\lambda+m)^{\sigma-1}) \\
& = e^{-\frac{\pi t}{2}} (1-\lambda)^{\sigma-1} (1 - F_2(s)).
\end{aligned}$$

Panašiai kaip ankščiau, parenkame tašką  $s_2 = \sigma_2 + it_2$ ,  $\sigma_2 < 0$ , esantį žemiau tiesės  $l$ , t.y.

$$\sigma_2 > \frac{\pi t_2}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}} + 1, \quad \sigma_2 < 0,$$

toki kuriam  $F_2(s_2) < 1$ . Šias sąlygas tenkina taškas

$$s_1 = -2 - i \left( \frac{3}{\pi} \log \frac{1-\lambda}{\lambda} + \frac{\log 2}{\pi} \right).$$

Tegu

$$B(s_2) := \left\{ s \in C : \sigma \leq \sigma_2, \sigma - \sigma_2 \geq \frac{\pi(t - t_2)}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}} \right\}.$$

Tuomet nesunku pastebėti, kad  $F_2(s) \leq F_2(s_2) < 1$  kai  $s \in B(s_2)$ . Taigi gauname, kad  $L(\lambda, \alpha, s) \neq 0$  kai  $s \in B(s_2)$ .

Akivaizdu, kad galime parinkti  $\sigma_0 = -2$ . Iš  $A(s_1)$  ir  $B(s_2)$  apibrėžimų matome, kad  $\epsilon_0$  galime imti didesnę iš atstumų tarp tiesės  $l$  ir taškų  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ . Lengva suskaičiuoti, kad abu atstumai sutampa ir yra lygūs dydžiui

$$\frac{\log 2}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 \frac{1-\lambda}{\lambda}}}$$

Todėl, nepriklausomai nuo  $0 < \lambda < 1/2$ , galime imti  $\epsilon_0 = \log 2/\pi$ .

Jei  $\lambda > 1/2$ , tai teoremos tvirtinimas išplaukia iš atvejo  $\lambda < 1/2$ , pasinaudojus lygybe

$$L(\lambda, \alpha, s) = \overline{L(1-\lambda, \alpha, \bar{s})}.$$

Tuo teorema įrodyta.

## Literatūra

- [1] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, On zeros of the Lerch zeta-function, Kanemitsu, Shigeru *et al.* (eds.), *Number Theory and its Applications. Proceedings of the Conference Held at the RIMS, Kyoto, Japan, November 10-14, 1997*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 129-143 (1999).
- [2] R. Spira, Zeros of Hurwitz zeta-functions, *Math Comput.*, **30** (136), 863-866 (1976).

## A note on the zeros of the Lerch zeta-function

R. Garunkštis

In the paper we obtain the effective zero free regions for the Lerch zeta-function.