Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 343–350

Mokinių gebėjimas argumentuoti kaip įrodymo mokymo prielaida

Sigitas BALČIŪNAS (ŠU)
el. paštas: balciunas@cr.su.lt

1. Įvadas

Tiesos problema yra pagrindinis tikrovės mokslinio pažinimo klausimas. Mokslinės žinios yra teisingi moksliniai faktai, kurie apjungiami ir sisteminami mokslinėse teorijose. Mokyklinė matematika apima pradinius įvairių matematinių teorijų (aritmetikos, algebros, geometrijos, matematinės analizės, tikimybių teorijos ir kt.) fragmentus. Kiekviena matematinė teorija egzistuoja kaip sąvokų ir teiginių, aprašančių kokią nors struktūrą ar struktūrų klasę, bei įrodymų, pagrindžiančių teiginių teisingumą, visuma. Klasikinės matematikos didaktikos požiūriu mokyti matematikos, reiškia visų pirma perteikti mokiniui šios žinių sistemos, kaip sudėtinės žmonijos kultūros dalies, elementus. Matematinis įrodymas, tokiu būdu, yra visų pirma mokymo turinio elementas, kurį mokinys privalo įsisavinti, o griežta, unifikuota, aksiominė, dedukcinė matematikos kurso struktūra – siektinas idealas.

Šiuolaikinėje didaktikoje vis didesnę reikšmę įgyja konstruktyvistinė mokymosi samprata [7], kurios pagrindinis postulatas gali būti suformuluotas taip: „*Mokinys ne perima išorėje egzistuojančias žinias, o jas konstruoja*“. Konstruktyvizmo paradigma matematikos didaktikoje iš esmės keičia įrodymo koncepciją ir jo vietą matematikos mokyme. **Matematinės tiesos moksleiviui nėra pagrindžiamos, įrodomos, jis pats įsitikina matematinio fakto teisingumu konstruodamas savo matematinių žinių sistemą.** Tokios interpretatyvistinės nuostatos laikomasi ir oficialiuose dokumentuose, reglamentuojančiuose matematinį švietimą šalyje, todėl pagrindimo proceso mokyklinėje matematikoje tyrimai laikantis konstruktyvistinio požiūrio yra aktualūs ir prasmingi.

Matematinių tiesų pagrindimas mokykloje yra kompleksinė sudėtinga problema, apimanti tiek naujos medžiagos, naujų matematikos žinių mokymo ir mokymosi klausimus, tiek gebėjimų argumentuoti, pagrįsti, įrodyti ugdymą. Mokykliniame kurse matematinių teiginių pagrįsti (įrodyti) taip, kaip jie pagrindžiami matematikos moksle, neįmanoma. Ar matematikai iš tiesų būdingas formalumas ir griežtumas? Matematikos mokslo istorijos faktai rodo [1], kad šiuolaikinė matematinės tiesos samprata, o tuo pačiu ir jos pagrindimo būdai neatsirado iš karto, o kito palaipsniui, evoliucionavo. Taigi, iki aksiomatinės matematinės teorijos organizacijos vyravo matematinių tiesų pagrindimo būdų įvairovė, kurią istorinės raidos perspektyvoje pakeitė įrodymas. Remiantis sociogenetiniais raidos principais, reikia tikėtis, kad panaši natūrali kaita galima ir mokantis matematikos. Istorinė įrodymo raidos analizė leidžia daryti ir kitą išvadą: pagrindimas visų pirma susijęs su teorijos kūrimu ir formalizavimu, nei su žinių taikymu, todėl mokykloje pagrindimas ir įrodymas turi atrasti savo vietą *žinių konstravimo procese.*

2. Problema

Kokiu būdu organizuoti mokymąsi, kad įrodymas moksleiviui taptų natūralia reikme, kaip ugdyti gebėjimą įrodinėti, koks yra argumentacijos ir įrodymo sąryšis? Daugelis autorių skiria argumentaciją ir matematinį įrodymą, tačiau yra įvairių nuomonių dėl jų sąsajų. N. Balacheff [2] nurodo įrodymo ir argumentacijos, kaip diskursų, socialinės prasmės skirtumus ir teigia, kad įrodymo reikia mokyti supriešinus jį su natūralia argumentacija, tuo tarpu Italijos matematikos didaktikos mokykloje [5] tyrimais grindžiama nuomonė, kad įrodymas tiesiogiai seka iš argumentacijos sprendžiant matematinę problemą. Rusų matematikos didaktai tradiciškai linkę sureikšminti matematinį įrodymą, pervertinti aksiomatinės matematinės medžiagos organizacijos svarbą matematinio ugdymo sistemoje. A. Stoliar [9] padėjo pagrindą matematinio ir „ikimatematinio“ įrodymo teorijai mokyklinėje matematikoje, tačiau pervertino logikos svarbą ir sumenkino moksleivio vidinę psichinę realybę. Lietuvoje neradome darbų paskirtų vien pagrindimo problemai spręsti, tačiau dažnas tyrėjas, nagrinėdamas įvairias specialiąsias metodikas, ypač vaizdumo mokyme problemą, paliečia šiuos klausimus. Kaip pabrėžia B. Balčytis [3], Lietuvos mokyklinėje matematikoje laikomasi „nuostatos, kad naujos sąvokos, ypač algoritmai, vaikams turi būti įrodinėjamos, t.y., grindžiamos pavyzdžiais, vaizdumu, psichologine įtaiga“. Pastarasis teiginys, akcentuojantis mokytojo vaidmenį pagrindžiant matematines tiesas, atspindi daugelio klasikinės didaktikos tyrimų esmę.

Taigi, kyla mokslinė problema, kurią galima išreikšti klausimu: kokia yra matematinių tiesų pagrindimo vieta, reikšmė ir funkcijos interpretatyvistinės didaktikos požiūriu ir kokiu būdu organizuoti matematikos mokymąsi, kad įrodymas taptų natūralia pažinimo proceso grandimi? Mes apsiribojame matematinių tiesų pagrindimo pedagoginių problemų žemesnėse vidurinės mokyklos klasėse tyrimu, kai mokiniai oficialiai dar nėra susipažinę su teoremos, įrodymo, apibrėžimo sąvokomis. Straipsnyje aprašomas tyrimas yra kompleksinio matematinių tiesų pagrindimo tyrimo iki pradedant mokyti matematinio įrodymo, dalis.

Straipsnyje pristatomo *tyrimo tikslas* – išskirti ir klasifikuoti moksleivių naudojamus matematinių tiesų pagrindimo būdus iki pradedant sistemingai mokytis matematinio įrodymo ir apibrėžti teorines galimybes šiuo pagrindu ugdyti įrodymo sampratą ir gebėjimą įrodinėti. Tyrimo metodologija grindžiama konstruktyvistiniu požiūriu į matematinio ugdymo procesą. Tyrimo metodai: pagrindimo fenomeno matematikoje didaktinė analizė (metodas aprašytas [8]) pusiau struktūruotas interviu, duomenų kategorizavimo procedūros ir statistinė duomenų analizė.

3. Tyrimo metodika ir organizavimas

Interviu dalyvavo 64 penktų, šeštų klasių moksleiviai, besimokantys aštuoniose skirtingose Šiaulių miesto mokyklų klasėse. Tyrimas buvo atliktas 1999 ir 2000 m. pavasarį.

Kiekvieno pokalbio trukmė 45 min. Kadangi tyrimas kokybinis ir statistinės išvados apie atitinkamos savybės apraiškas visoje populiacijoje nedaromos, tai imtis nėra statistinė: klasės buvo pasirinktos eksperimentatoriaus ir mokyklų vadovybės sutarimu, moksleiviai – pagal matematikos mokymosi rezultatus. Imties dydis nustatytas laikantis „prisotinimo" kriterijaus, pagal kurį tyrimas yra baigiamas, kai stebimos situacijos pradeda dažnai kartotis ir tolesnė atvejų analizė nebeteikia kokybiškai naujos informacijos. Eksperimentatoriaus ir moksleivio pokalbis buvo fiksuojamas garso juostoje, vėliau esminiai jo elementai užrašomi popieriuje. Pradinėje mokykloje ir penktojoje klasėje matematiniai teiginiai ir veiklos būdai buvo pagrindžiami įvairiais metodais ir moksleivio pateiktas pagrindimas yra sąlygotas užduoties tipo, todėl, siekdami atskleisti moksleivių naudojamų argumentų įvairovę, tyrimui parinkome 8 skirtingas temas. Jos pateikiamos 1 lentelėje.

Interviu struktūra ir duomenų kategorizavimas. Po įvadinio pokalbio, kurio metu moksleivis supažindinamas su tyrimo tikslais ir interviu turinio kryptimis, sudaromas didaktinis kontraktas su tiriamuoju, eksperimentatorius organizavo nuoseklų pokalbį visomis minėtomis temomis. Moksleiviams pateikiamas konkretus nesudėtingas uždavinys: išspręsti lygtį, sudėti skaičius, palyginti skaičius, pritaikyti daugybos komutatyvumo dėsnį, po to prašoma pagrįsti naudotą veiklos metodą. Eksperimentatorius savo klausimais skatina moksleivį plėtoti argumentaciją. Tokia interviu struktūra pasirinkta atsižvelgiant į matematikos mokymosi nagrinėjamame amžiaus tarpsnyje ypatumus, kuomet matematikos žinios, skirtingai nei, pavyzdžiui, istorijos, gamtos mokslų, yra daugiau pro-

1 lentelė. 5, 6 klasės moksleivių naudojami matematinių tiesų pagrindimo tipai pagal argumentų turinį. Dažnių lentelė

Matematinė tiesa	matematinis	empirinis	intuityvusis	paremtas autoritetu	kita
Lygties $x - a = b$ sprendimas	24(13%)	49(26%)	52(27%)	64(33%)	3(2%)
Natūraliųjų skaičių palyginimas	77(40%)	17(9%)	32(17%)	59(31%)	7(3%)
Dešimtainių trupmenų palyginimas	86(45%)	34(18%)	33(17%)	31(16%)	8(4%)
Paprastųjų trupmenų palyginimas	24(13%)	108(56%)	11(6%)	40(21%)	9(5%)
Natūraliųjų skaičių sudėties raštu algoritmas	51 (27%)	25(13%)	45(23%)	63(33%)	8(4%)
Dešimtainių skaičių sudėties raštu algoritmas	47 (24%)	28(15%)	49(26%)	60(31%)	8(4%)
Natūraliųjų skaičių sudėties komutatyvumo dėsnis	79(41%)	8(4%)	34(18%)	69(36%)	2(1%)
Natūraliųjų skaičių daugybos komutatyvumo dėsnis	75(39%)	0(0%)	40(21%)	76(40%)	1(1%)

Pastaba: lentelėje skaičiuoti visi mokinių pateikti argumentai, nepriklausomai nuo to, kiek jie atitinka pagrindžiamą teiginį.

cedūrinės, nei propozicinės [9]. J. Vergnaud [11] savo konceptualiųjų laukų teorijoje procedūrines žinias, kuriomis vadovaujasi moksleivis duotoje situacijų klasėje, vadina teoremomis veikloje. Teoremą: „jei dviejų trupmenų skaitikliai vienodi, tai didesnė yra ta, kurios vardiklis mažesnis", pavyzdžiui, gali atitikti teorema veikloje „kai skaičiai viršuje vienodi, ženklas (nelygybės) rašomas atvirkščiai". Tuo būdu, tyrime moksleivis pagrindžia ne teiginį, kurio formuluotė pateikiama vadovėlyje, bet teoremą veikloje. Pateikiame interviu fragmentą. K – moksleivė, E – eksperimentatorius, laužtiniuose skliaustuose pateikiami komentarai.

Kodas 13L. Kristina, penktos klasės moksleivė, matematikos pažymys – 8, lietuvių kalbos pažymys – 8.

K. [teisingai išsprendė lygtį] **E.** Kaip Tu sprendei lygtį? Kodėl reikia sudėti, o ne, pavyzdžiui, atimti? [prašo ne patikrinti, ar gautas atsakymas yra teisingas, o pagrįsti procedūrą] **K.** Reikia sudėti, nes lygty yra atimti. Yra tokia taisyklė, kad jeigu atimti, tai sudėti, o jeigu lygty sudėti, tai atimti [savo veiklą pagrindžia nurodydama veiklos taisyklę. Ši taisyklė gali ir nesutapti su vadovėlyje pateikta ar mokytojo pasakyta formuluote, tai yra bandymas žodžiais išreikšti tai, ką Vergnaud vadina teorema veikloje. Mūsų interviu tikslas – sužinoti, kokiais būdais moksleivis pateisina šios „teoremos" teisingumą. Matematikos teorijoje ši teorema yra formuluojama taip: lygties $x - a = b$ sprendinys yra $a + b$.] **E.** Parodyk man, kad ši taisyklė yra teisinga, kodėl ji teisinga. [prašo pagrįsti teoremą veikloje] **K.** Ji teisinga, nes mes taip visada darome. [argumentuoja, nurodydama bendrą savo ir klasės draugų patirtį] **E.** Tačiau gal jūs sprendžiate klaidingai? Įrodyk man, kad teisinga. [prašo patikslinti argumentą] **K.** Mokytoja taip mums sakė, ir vadovėlyje parašyta [argumentuoja mokytojo ar vadovėlio, kaip teisingo žinių šaltinio autoritetu] **K.** Čia turėtum gauti maždaug 500, o jeigu sudauginsi, gausi daugiau. [argumentuoja remdamasi intuityviu skaičiaus ir operacijos pojūčiu.]

Taigi, kiekvienas moksleivis interviu metu, pagrįsdamas savarankiškai ar su eksperimentatoriaus pagalba suformuluotą bendrąją sprendimo taisyklę išreiškiančią veiklos teoremą, pateikė ne mažiau, negu tris argumentus (jų turinys gali būti ir tapatus). Sekančiame tyrimo etape buvo sudaryta pirminė duomenų matrica, kurioje surašyta, kokiu būdu kiekviena iš veiklos taisyklių pagrindžiama vadovėliuose, iš kurių moksleiviai mokėsi, bei kiekvieno moksleivio pateikti argumentai (pirmąjį iš jų vadinsime pagrindiniu). Remdamiesi didaktinės pagrindimo fenomeno analizės rezultatais, išskyrėme ir užkodavome pagrindimo tipus. **A.** Pagal argumentų turinį skyrėme matematinius argumentus, t.y., kai argumentuodami moksleiviai remiasi matematikos žiniomis, fizikinius-empirinius argumentus – argumentuodami naudoja fizikinius modelius, konkrečias matematinių teiginių interpretacijas, bei argumentaciją nurodant autoritetą. **B.** Pagal genetinį kriterijų (Balacheff, 1998): naivusis empirizmas, kritinis eksperimentas, įrodymas pavyzdžiu, mintinis eksperimentas. **C.** Pagal mąstymo veikos būdo kriterijų [10]: pagrindimas veiksmais, vaizdais, simboliais. **D.** Pagal argumento ir išvados sąsajas, loginio mąstymo operacijos pobūdį (pagal Stoliar [8]): indukcija, dedukcija, analogija, patikrinimas. Gavome galutinę duomenų matricą, analizuojame, panaudodami statistinius metodus.

4. Tyrimo rezultatai

Šie rezultatai atskleidžia tik nagrinėjamos savybės ypatumus tirtoje moksleivių grupėje. G. Arsac [1] vienu iš pagrindinių požymių, skiriančių matematinį įrodymą nuo buitinės, kasdienės argumentacijos, laiko tai, kad remiamasi išimtinai apibrėžtos matematinės teorijos teoremomis ir sąvokų apibrėžimais, todėl vertingas yra kiekvienas mokinių bandymas argumentuojant pateikti matematinius teiginius. Tai rodo, kad moksleiviai bando sieti įvairias matematines žinias, kad yra pagrindas formuotis lokalioms žinių struktūroms. 1 lentelėje nurodyti moksleivių pateiktų argumentų tipų dažniai.

Pastebėkime, kad naudojama argumentacija priklauso nuo pagrindžiamų procedūrinių žinių pobūdžio, tačiau negalime teigti, kad ji sąlygota vien vadovėlio ar mokytojo aiškinimo (tikrinta nepriklausomumo hipotezė, chi kvadrato kriterijus, $p < 0,05$, kontingencijos koeficientas 0,34). Štai natūraliųjų skaičių sudėties daugybos komutatyvumo dėsniai vadovėlyje [6] grindžiami tiek empiriškai, tiek matematiškai, tačiau moksleiviai empirinio pagrindimo beveik nepateikia. Gilesnė analizė atskleidė keletą šio reiškinio priežasčių:

- šie dėsniai penktos klasės moksleiviams yra intuityviai aiškūs, patvirtinti jų praktine patirtimi, todėl pateikiamo aiškinimo jie nesuvokia kaip pagrindimo;
- moksleiviams nebuvo sudaryta didaktinė situacija, kurioje jie patys bandytų pagrįsti šiuos dėsnius, žinios apie pagrindimą neaktualios, nebuvo panaudotos tolesnėje veikloje;
- demonstruojant naują jau seniai žinomo fakto pagrindimą, reikėtų atsižvelgti į tai, kad moksleivis turi tam tikras nuostatas dėl pagrindimo svarbos matematikoje.

Svarbu pažymėti, kad didelė dalis mokinių atsakydami, kodėl taisyklė yra teisinga, rėmėsi autoritetu: mokytoju, vadovėliu, mokslininkais, žmonijos praktika. Kai kuriuose klausimuose apie 10 procentų moksleivių nepateikė jokio kito argumento, tik nurodė autoritetą. Konstruktyvistinės didaktikos požiūriu tai gali reikšti žinių konstravimo proceso trūkumus. Reikia pasidžiaugti, kad gana daug moksleivių pateikė matematinius argumentus, nors penktosios klasės vadovėlyje pateikiamas beveik išimtinai empirinis pagrindimas. (Pavyzdžiui, palygindami dešimtaines trupmenas, nurodė skirtuminio palyginimo taisyklę).

Moksleiviai vengia empiriškai argumentuodami atlikti fizinius veiksmus su objektais ar šių objektų sąryšius vaizduoti lape. Nors buvo raginami naudotis popieriumi, žirklėmis, skaičiavimo kubeliais, svarstyklėmis tačiau nei vienam jų neprireikė. Visumoje, nei vienas moksleivis nepagrindė veiksmu, dauguma naudojosi vaizdu tik argumentuodami paprastųjų trupmenų palyginimą, tačiau tai dažniausiai buvo ne pirmasis argumentas. Gal būt jie mano, kad tai „vaikų žaidimas", o gal negali, nemoka matematikos interpretuoti konkrečiame fizikiniame modelyje? Tirdami kaip moksleiviai geba argumentuoti tiek fizikiniame-empiriniame, tiek matematiniame lygmenyje ir kaip šie argumentai tarpusavyje siejasi, pabandėme atlikti stačiakampio ploto formulės ir natūraliųjų skaičių sudėties raštu pagrindimo kognityviąją rekonstrukciją. Tyrimo rezultatai aprašyti straipsnyje [4]. Tirti 5, 6 klasių moksleiviai, net ir pagrįsdami empiriškai, situaciją linkę nupasakoti žodžiu, kartais net naudoja savo simbolius, o veikla su matematinių objektų modeliais ar

2 lentelė. 5, 6 klasės moksleivių naudojami matematinių tiesų pagrindimo tipai pagal mąstymo būdus. Dažnių lentelė

Pagrindimo tipas	dedukcija	indukcija	analogija	patikrinimas
Argumentų procentinis dažnis	13 %	46 %	3 %	38 %

schemomis (stačiakampio karpymas ir padengimas vienetiniais kvadratėliais ar sudėties veiksmo demonstravimas skaičiavimo kubeliais) kelia nemažų sunkumų.

Matematika išsiskiria iš kitų mokslų savo teorijos organizavimo būdu. Matematikos prigimtis ir siekis kiekvieną teorinį teiginį pagrįsti tos teorijos rėmuose lėmė kad matematiniai mąstymo metodai yra išimtinai dedukciniai. Vienas žymiausių šiuolaikinių matematikos filosofų, I. Lakatos sugriovė šią idilę, teikdamas, kad matematinis pažinimas vystosi pagal panašią formulę, kaip ir gamtos mokslai. Empiriniai metodai ir su jais susiję mąstymo būdai – indukcija, analogija – glaudžiai susiję su matematinio teiginio teisingumo nustatymu ir dedukcija nėra vienintelis būdas įsitikinti teisingumu. D Polya [10] kalba apie matematinės tiesos tikėtinumą, kuris gali būti toks reikšmingas, kad matematikų bendruomenė priima teiginį net neatradus jo dedukcinio įrodymo. Tačiau, matematika visuotinai pripažįstama dedukciniu mokslu. Siekdami įvertinti moksleivių argumentus pagal jų logines sąsajas su pagrindžiamu teiginiu, išskyrėme tokius mąstymo būdus: dedukcija, indukcija, analogija, patikrinimas. 2 lentelėje pateikiame apibendrintus tyrimo rezultatus.

Kaip reikėjo tikėtis, argumentuodami mokiniai daugiausiai naudojo induktyvaus protavimo schemą. Analogijai teko nedidelis atsakymų procentas, nors žinome, kad moksleiviai labai dažnai išvadas daro remdamiesi šiuo protavimo būdu. Panašiai kaip ir argumento turinio analizės atveju, buvo tikrinta ar argumentacijos tipas ir pagrindžiamo teiginio rūšis yra nepriklausomi kintamieji (chi kvadrato kriterijus). Ši nulinė hipotezė atmetama reikšmingumo lygmeniu $p < 0,05$, kontingencijos koeficientas 0,34. Reiškia atskiri teiginiai stimuliuoja tam tikrų protavimo būdų naudojimą juos pagrindžiant.

Išvados

1. Moksleivių patirtis ir praktinė matematinė veikla yra ne tik matematinių sąvokų bei jas jungiančių teiginių ir veiklos taisyklių šaltinis, bet ir šių *matematinių tiesų teisingumo nustatymo priemonė.* Tiriamieji moksleiviai, grįsdami jiems žinomas matematikos taisykles, nurodė ne vien šaltinį, autoritetą, bet ir pateikė tiek matematinius, tiek fizikinius argumentus, kurių dalis savo turiniu sutapo su vadovėlio, iš kurio jie mokėsi, aiškinimu. 5, 6 klasėje iki pradedant sistemingai mokytis matematinio įrodymo, naujų matematinių žinių konstravimo metu moksleiviai ne tik atranda ir formuluoja dėsningumus ir veiklos taisykles, (algoritmus), bet tuo pačiu įgauna ir supratimą apie matematinių tiesų pagrindimo būdus. Šiuo požiūriu, empirinių situacijų tyrimai, kurių pagrindu vadovėlyje dažniausiai pateikiama nauja

medžiaga ne visuomet skatina matematinės teiginio esmės supratimą, mažoka ir elementarių dedukcinio protavimo pavyzdžių.

2. Moksleivių naudojamos to paties teiginio pagrindimo schemos evoliucionuoja ir kinta ne tik priklausomai nuo tikslingai vadovėlyje pateikiamos medžiagos ar mokytojo organizuojamos veiklos, bet ir nuo vidinių, dažnai mokinio net neįsisąmoninamų matematinių žinių ir pagrindimo būdų sąsajų: mokiniai argumentuoja naudodami matematinius terminus ar žinias, kurių mokėsi jau po grindžiamo teiginio mokymosi. Prasminga asmeninių žinių plotmėje kalbėti ne tik apie sąvokos ar teiginio sampratos evoliuciją, bet ir apie su jais susijusio pagrindimo evoliuciją.

3. Matematinių tiesų pagrindimo procesai, kuriuos stebėjome tyrime, turi matematiniam įrodymui būdingų elementų, kurių svarbiausi yra:

   a) kaip ir matematinio įrodymo, pagrindimo tikslas – parodyti, kad teiginys apie matematinius objektus yra teisingas;
   b) kaip ir įrodymas, pagrindimas mūsų eksperimente atskirtas nuo euristinio proceso, pagrindžiamas ir argumentuojamas teiginio, kurio teisingumu iš esmės neabejojama, teisingumas, tačiau su matematinės tiesos atradimu dažnai išlieka glaudus ryšys;
   c) yra nemaža moksleivių, kurie pagrįsdami remiasi matematinėmis (teorinėmis) žiniomis, naudoja dedukcinio protavimo elementus.

4. Manome, kad tikslinga mokymo procese iki pradedant mokyti matematinio įrodymo, esminio tiesos patvirtinimo būdo matematikoje, į naujų žinių konstravimą žvelgti ne tik empirikos „matematizavimo“ ir teorijos (bent jau procedūrinių žinių) kūrimo, bet ir matematinių tiesų pagrindimo aspektu. Pagrindimo būduose būtų galima įžvelgti ir stengtis išryškinti matematiniam įrodymui būdingus elementus. Toks požiūris ir jį atitinkantis ugdomosios veiklos organizavimas gal būt leistų moksleiviui natūraliau pereiti prie matematinio įrodymo sampratos ir būdų. Mūsų tyrimas atskleidė dalį šiam procesui reikšmingų prielaidų.

Literatūra

[1] G. Arsac, L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 8(3), 267–312 (1987).

[2] N. Balacheff, *Etude des processus de preuve chez des élèves de Collège*, Thèse de Doctorat d'état ès-sciences, Grenoble, Université Joseph Fourier (1988).

[3] B. Balčytis, *Skaičių šalis, Kaip mokyti matematikos trečiaklasius ir ketvirtaklasius*, Kaunas (1997).

[4] S. Balčiūnas, B. Balčytis, Skaičiavimo algoritmų pagrindimo kognityvinė rekonstrukcija, *Socialiniai mokslai*, 2(23), 71–79 (2000).

[5] P. Boero, R. Garuti, E. Lemut, M. Mariotti, Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems, *PME XX*, Valencia, Spain (1996).

[6] N. Cibulskaitė, M. Stričkienė, *Matematika ir pasaulis*, Vadovėlis 5 klasei, Vilnius (1996).

[7] P. Ernest, *The Philosophy of Mathematics Education*, London, Falmer Press (1991).

[8] L.G.J. Mari, *Didactical Analysis: Towards a Non-Empirical Qualitativo Method to Found the Research Activities in Mathematic Education*, (1998).

[9] V. Shute, Learning processes and learning outcomes, *Intelligence*, **21**, 412–418 (1997).
[10] D. Tall, Cognitive development, representations and proof, *Paper Presented at the Conference on Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education*, London, 27–38 (1995).
[11] G. Vergnaud, I. Vinatier, Connaisance et action: comment les réunir en une seule théorie, *La nouvelle revue de l'AIS*, **1–2**, 44–52 (1998).

Student's ability to the argumentation as the basic condition to develop proof conception

S. Balčiūnas

Empirical investigation is presented in the article. Methods of mathematical truths substantiation, aplied by pupils, are found out and classified on the basis of mathematical truths argumentation analysis, known by the pupils. Investigation data is used to describe theoretical possibilities, basing upon the pupils' argumentation, to develop proof conception and ability to demonstrate.