Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 611–614

Variacinės eilutės kraštinių narių asimptotiniai tyrimai

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
el. paštas: aksoma@fmf.ktu.lt

1. Įvadas

Tarkime,, kad $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su skirstinio funkcija F. Sudarykime variacinę eilutę:

$$X_1^{(n)} \leqslant X_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant X_n^{(n)}.$$

Nariai $X_k^{(n)} ir X_{n-k+1}^{(n)}$, kai $k \geqslant 1$ fiksuotas, vadinami variacinės eilutės kraštiniais nariais. Kai $k = 1$, gauname variacinės eilutės ekstremaliąsias reikšmes (minimumą ir maksimumą). Kraštinių narių asimptotikai, kai $n \to \infty$, yra pašvęsta daug darbų. Nemaža ju dalis yra pateikta moografijose [1] ir [2]. Mus domins atvejis, kai imties tūris $N = N_n$ yra atsitiktinis ir nepriklausomas nuo visų X_j, $j \geqslant 1$. Esant tiesiniam statistikų $X_k^{(N)} ir X_{n-k+1}^{(N)}$ normavimui, ši prolema išspręsta perkėlimo teoremoje ([3]). Mes tirsime bendresnį – netiesiškai normuotų kraštinių narių atvejį. Tai autoriaus darbų, pateiktų publikacijose [4] ir [5] tęsinys.

Tarkime, kad yra tokios realiųjų skaičių sekos $\{U_n,\ n \geqslant 1\}$ ir $\{V_n,\ n \geqslant 1\}$, su kuriomis

$$\tau_n := nF(U_n) \to \tau, \tag{1}$$
$$\gamma_n := n\big(1 - F(V_n)\big) \to \gamma, \tag{2}$$

kai $n \to \infty$. Pažymėkime $\mathbf{P}(N_n < x) := A_n(x)$ ir tarkime, kad skirstinio funkcija $A_n(x)$ tenkina sąlygą:

$$A_n(nx) \to A(x), \quad \text{kai} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

2. Rezultatų formuluotė ir įrodymas

Teorema. *Tarkime, kad išpildyta* (3) *sąlyga. Tada:*

1. *Jeigu yra* (1), *tai*

$$\mathbf{P}(X_k^{(N)} < U_n) \to L^{(k)}(\tau), \quad \textit{kai} \quad n \to \infty;$$

čia skirstinio funkcija

$$L^{(k)}(\tau) = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\tau^t}{t!} \int_0^\infty z^t \mathrm{e}^{-z\tau}\, \mathrm{d}A(z).$$

2. *Jeigu yra* (2), *tai*

$$\mathbf{P}(X_{n-k+1}^{(N)} < V_n) \to H^{(k)}(\gamma), \quad \textit{kai} \quad n \to \infty;$$

čia funkcija

$$H^{(k)}(\gamma) = \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\gamma^t}{t!} \int_0^\infty z^t \mathrm{e}^{-z\gamma}\, \mathrm{d}A(z).$$

Teoremos įrodymas. Panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname:

$$\mathbf{P}(X_k^{(N)} < U_n) = \sum_m \mathbf{P}(X_k^{(m)} < U_n)\mathbf{P}(N = m).$$

Įvykiai $\{X_k^{(m)} \geqslant U_n\}$ ir {įvyksta nedaugiau kaip $k-1$ įvykių $X_j < U_n$, $j = \overline{1, m}\}$ yra lygūs. Todėl

$$\mathbf{P}(X_k^{(m)} < U_n) = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} C_m^t F^t(U_n)\big(1 - F(U_n)\big)^{m-t}.$$

Dabar

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_k^{(N)} < U_n) \\
&\quad = 1 - \sum_m \sum_{t=0}^{k-1} \frac{m(m-1)\dots(m-t+1)}{t!} F^t(U_n)\big(1-F(U_n)^{m-t}\big)\mathbf{P}(N = m) \\
&\quad = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\tau_n^t}{t!} \sum_m \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\right)\dots\left(\frac{m}{n} - \frac{t-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{m-t} \mathbf{P}(N = m) \\
&\quad = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\tau_n^t}{t!}\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{-t} \int_0^\infty z\left(z - \frac{1}{n}\right)\dots\left(z - \frac{t-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{nz} \mathrm{d}A_n(nz).
\end{aligned}$$

Skaičiuodami ribą, gauname:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_k^{(N)} < U_n) = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\tau^t}{t!} \int_0^\infty z^t \mathrm{e}^{-\tau z}\, \mathrm{d}A(z).$$

Antroji teoremos dalis įrodoma analogiškai. Pateiksime tik bazinius įrodymo momentus:

$$\mathbf{P}(X_{n-k+1}^{(m)} < V_n) = \sum_m \mathbf{P}(X_{n-k+1}^{(m)} < V_n)\mathbf{P}(N = m),$$

$$\mathbf{P}(X_{n-k+1}^{(m)} < V_n) = \sum_{t=0}^{k-1} C_m^t \big(1 - F(U_n)\big)^t F^{m-t}(V_n),$$

$$C_m^t\big(1-F(V_n)\big)^t F^{m-t}(V_n) = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\right)\dots\left(\frac{m}{n}-\frac{t-1}{n}\right)}{t!}\gamma_n^t\left(\left(1-\frac{\gamma_n}{n}\right)^n\right)^{\frac{m}{n}-\frac{t}{n}}.$$

Iš šių teiginių išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_{n-k+1}^{(N)} < V_n) = H^{(k)}(\gamma).$$

Pavyzdys. Tarkime, kad

$$\mathbf{P}(N_n = m) = p_n(1 - p_n)^{m-1}, \quad m \geqslant 1 \quad \text{ir} \quad p_n = \frac{1}{n}.$$

Tada

$$A(z) = 1 - \mathrm{e}^{-z}, \quad z \geqslant 0$$

ir

$$L^{(k)}(\tau) = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\tau^t}{t!}\int_0^\infty z^t \mathrm{e}^{-z(\gamma+1)}\,\mathrm{d}z = 1 - \frac{1}{1+\tau}\sum_{t=0}^{k-1}\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^t = \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^k,$$

$$L^{(k)}(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^k, \quad \tau \geqslant 0, \quad k \geqslant 1.$$

Analogiškai

$$H^{(k)}(\gamma) = 1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k, \quad \gamma \geqslant 0, \quad k \geqslant 1.$$

3. Komentarai apie normavimą

Sekas $\{U_n,\ n \geqslant 1\}$ ir $\{V_n,\ n \geqslant 1\}$ galima parinkti įvairiais būdais. Pateiksime keletą $\{V_n,\ n \geqslant 1\}$ variantų:

- $V_n = V_n(x) = xb_n + a_n$ (tiesinis normavimas),
- $V_n = V_n(\gamma) = F^{-1}(\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{n}})$;
- $V_n = V_n(\gamma) = F^{-1}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)$;

- $V_n = V_n(x) = F^{-1}(G^{\frac{1}{n}}(x))$; čia $G(x)$ – skirstinio funkcija.

Analogiškai galime apibrėžti įvairias sekos $\{U_n,\ n \geqslant 1\}$ versijas.

Literatūra

[1] J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, John Willey and Sons, New York (1984).

[2] M.R. Leadbetter et al., *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, New York, Heldelberg, Berlin (1986)

[3] Б.В. Гнеденко, А. Шериф, Предельные теоремы для крайных членов вариационного ряда, DAH, **270**(3) (1983).

[4] A. Aksomaitis, Maksimumų su atsitiktiniu komponenčių skaičiumi asimptotiniai tyrimai, *LMD mokslo darbai*, III tomas, 461–464 (1999).

[5] A. Aksomaitis, Maksimumų ir minimumų bendrųjų skirstinių asimptotiniai tyrimai, *Liet.matem.rink.*, T.40, MII, 453–457 (2000)

Asymptotical investigation of extreme terms of the variational series

A. Aksomaitis

In asymptotics of extreme terms of the variational series is presented. The volume of the sample is random and normalization or nonlinear.