

Geometrija su kompiuteriu

Joana LIPEIKIENĖ (VPU)

el. paštas: lipeika@ktl.mii.lt

1. Įvadas

Geometrija yra ta matematikos sritis, kurios dėstyme neabejotinai verta naudoti šiuolaikines matematinių uždavinių sprendimo kompiuteriu sistemas. Niekas neprieštaraus, kad galimybė greitai sukurti geometrinius objektus, nubrėžti juos, gauti jų parametrus yra geras įrankis geometrijos mokytojo rankose, nes gali padėti aiškinant naujas sąvokas, išimenant teiginius, ryšius tarp geometrinių objektų, norint sudominti dėstomu dalyku, pagyvinti pamokas.

Literatūros lietuvių kalba apie matematinių uždavinių sprendimo programų paketus yra labai mažai, o apie jų taikymą geometrijai, kiek mums žinoma, lietuvių kalba iš viso nėra. Todėl čia aptariamos galimybės, kurias teikia viena geriausių ir galingiausių matematinių uždavinių sprendimo sistema MAPLE. Ši programų paketą pasirinkome todėl, kad jo geometrinėje dalyje mokymui daug įvairių galimybių, jas išsivinti besimokantiems nėra sudėtinga, o svarbiausia – šios sistemos kai kurios versijos yra nemokamai platinamos Internete (<http://www.maplesoft.com>), taigi prieinamos kiekvienam, turinčiam šiuolaikinį kompiuterį.

2. Geometriniai MAPLE paketai

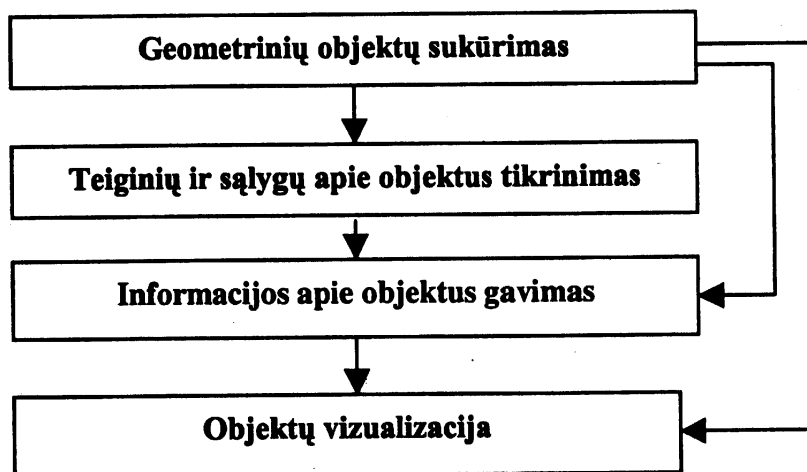
Vidurinės mokyklos kursui naudingiausi trys MAPLE geometriniai paketai: *geometry* – planimetrijos uždaviniams, *geom3d* – stereometrijos dėstymui ir *plottools* – figūrų braižymui. Atidarę sistemos MAPLE darbo langą ir norėdami naudoti vieną iš šių paketų, pirmiausia turime jį išsikviesti raktažodžiu *with*. Pvz.,

```
> with(geometry);
```

MAPLE komandų eilutė visada prasideda simboliu “>”. Kiekviena komanda turi pasibaigti kabliataškiu arba dvitaškiu, o jos vykdymui reikia paspausti *Enter*. Kelios komandos gali būti atskirtos kableliais, bet paskutinė turi baigtis kabliataškiu. Tada žemiau atsiranda paketo darbo rezultatai arba pranešimas apie klaidas. Jei komandos eilutė baigiama dvitaškiu, komanda vykdoma, bet rezultatai nespausdinami. Komandų rašymo sintaksė sistemoje MAPLE panaši į visų matematinių paketų. Kaip įprasta, skiriamos didžiosios ir mažosios raidės, pagrindiniai veiksmų operatoriai yra +, -, *, /, o funkcijos *sqrt*, *abs* ir *exp* reiškia atitinkamai kvadratinę šaknį, absoliutinių dydį ir eksponentę. Apie visas funkcijas galima sužinoti išsikvietus pagalbą komanda *? index [function]*, o apie konkrečią

funkciją – ? *function* (vietoj *function* rašomas konkrečios funkcijos vardas). Pvz., po komandos ?*area* paaiškinama, ką reiškia ši funkcija, skaičiuojanti objekto plotą, ir kaip į ją kreiptis. Smulkiau apie darbą su MAPLE galima pasiskaityti knygose [2,3].

MAPLE geometrinių paketų teikiamas galimybes galima pavaizduoti tokia schema:



Taigi bet koks paketų taikymas prasideda geometrinio objekto ar kelių objektų sukūrimu. Tai nėra vizualus sukūrimas (sukurtas objektas automatiškai nėra nubrėžiamas), o tik sukūrimas kompiuterio atmintyje tolimesniam darbui. Galima tikrinti įvairias sąlygas ar teiginius apie sukurtus objektus (pvz., ar sukurtos tiesės lygiagrečios, ar trikampiai panašūs ir t.t.). Taip pat žaibiškai galima gauti įvairią informaciją (ilgį, plotą ir t.t.) apie bet kurią sukurtą objektą. Panaudota viena iš kelių brėžimo funkcijų nubrėžia objektą.

Žinoma, sunku bus dirbti iš viso nemokančiam anglų kalbos mokytojui, bet pakanka elementarių žinių ir žodyno.

3. Objektų sukūrimas

Paketu *geometry* galima kurti visus pagrindinius dvimatės ir trimatės Euklido geometrijos objektus: tašką, tiesę, trikampį, kvadratą, apskritimą, elipsę, parabolę, rutulį, prizmę, kubą ir t.t. Objekto sukūrimo komanda paprastai susideda iš specialios funkcijos, kuriančios objektą ir skliausteliuose nurodomo vartotojo pasirinkto objekto vardo bei objektą nusakančių parametrų. Šių funkcijų vardai paprastai yra angliški objektų pavadinimai arba jų sutrumpinimai (pvz., tašką kuria funkcija *point*, tiesę – *line* ir t.t.). Po teisingai surinkto prašymo sukurti objektą jis sukuriamas, dešinėje paketas užrašo sukurtą objekto vardą, bet kol nėra specialios komandos, objektas nebrėžiamas. Jei pranešama apie klaidą arba komanda paprasčiausiai perrašoma dešinėje, kažkas buvo atlikta ne taip, objektas nebuvo sukurtas, reikia ištaisyti klaidas. Pažiūrėkime keletą pavyzdžių.

Taškas

Taškas sukuriamas komanda *point(A, Ax, Ay)* arba *point(A, [Ax, Ay])*, kur *A* yra taško vardas, o *Ax* ir *Ay* yra atitinkamai horizontalioji ir vertikalioji taško koordinatės. Pvz.,

```
> with(geometry) :
> point(A, 0, 1);
```

A

Po šių dviejų eilučių surinkimo sistemos lange dešinėje pasirodo raidė *A*, rodanti, kad taškas tikrai sukurtas.

Tiesė

Tiesė sukuriama, nurodžius du jau sukurtus taškus arba tiesės lygtį, t.y. *line(l, [A, B])* arba *line(l, lygtis, n)*, kur *l* yra tiesės vardas, o *n* (nebūtinai) yra horizontalios ir vertikalios koordinatinių ašių pavadinimai. Nenurodžius ašių vardų, paketas paprašo juos įvesti atskirai. Pvz.,

```
> point(A, 0, 0), point(B, 0, 1);
```

A, B

```
> line(t, [A, B]);
```

t

```
> line(t1, y = 5 - x, [x, y]);
```

t1

```
> line(t2, a - b = 2, [a, b]);
```

t2

```
> line(t3, y = 3 * x - 1);
```

```
Enternameofthehorizontalaxis :
```

```
x;
```

```
Enternameoftheverticalaxis :
```

```
y;
```

t3

Trikampis

Trikampis pakete *geometry* gali būti sukurtas, nurodant tris taškus arba tris susikertančias tieses, tris kraštinių ilgius arba dvi kraštines ir kampą tarp jų, t.y. viena iš šių komandų:

```
> triangle(T, [A, B, C], n);
```

```
> triangle(T1, [l1, l2, l3], n);
```

```
> triangle(T2, [1kraštinė, 2kraštinė, 3kraštinė]);
```

```
> triangle(T3, [1kraštinė, 'angle' = theta, 2kraštinė], n);
```

Čia *n* yra ašių vardai, pvz., *[x, y]*, kurie nebūtinai turi būti įrašyti. Kaip ir tiesės kūrimo atveju, jei jų nenurodome, paketas paprašo juos įvesti atskirai. Pvz.,

```
> point(A, 0, 0), point(B, 0, 1), point(C, 1, 1);
```

A, B, C

> *triangle*(*T*, [*A*, *B*, *C*]);

T

> *line*(*t1*, *y* = 0, [*x*, *y*]), *line*(*t2*, *y* = *x*, [*x*, *y*]), *line*(*t3*, *x* + *y* = 2, [*x*, *y*]);

t1, *t2*, *t3*

> *triangle*(*T1*, [*t1*, *t2*, *t3*]);

T1

> *triangle**T2*, [5, 5, 5]);

T2

> *triangle*(*T3*, [2, 'angle' = $\text{Pi}/2$, 1]);

T3

Analogiškai kuriami ir stereometrijos objektai.

Rutulys

Rutulys apibrėžiamas vienu iš penkių būdų, nurodant

– keturis taškus:

> *sphere*(*s*, [*A*, *B*, *C*, *D*], *n*); arba

– nurodant du taškus, kurie sudaro rutulio skersmenį:

> *sphere*(*s1*, [*A*, *B*], *n*); arba

– centrą ir spindulį:

> *sphere*(*s2*, *O*, *r*, *n*); arba

– centrą ir plokštumą, kuri liečia rutulį:

> *sphere*(*s3*, *O*, *p*, *n*); arba

– rutulio lygtį:

> *sphere*(*s4*, *lygtis*, *n*).

Panašiai kuriami ir kiti objektai. Iš pateiktų pavyzdžių matyti, kad dirbantis su *geometry* gali pasirinkti objekto nusakymo būdą ir visus objekto parametrus, taigi su pažindinami su naujomis sąvokomis mokiniai iš karto patys gali bandyti sukurti naujus objektus. Tai verčia galvoti, kaip galima nusakyti objektą, kokie parametrai yra esminiai, kokias sąlygas turi tenkinti parametrai, kad objektas egzistuotų.

4. Objektų nubrėžimas

Be abejonės didžiausia geometrijos mokymo kompiuteriu vertybė yra vizualizacija, nes visus paketuose *geometry* ir *geom3d* sukurtus geometrinius objektus galima nubrėžti. Mokinyms gali čia pat pamatyti savo sukurtą objektą, jį apžiūrėti iš visų pusių, greitai pakeisti, kas jo netenkina, ir vėl matyti savo darbo rezultatus. Brėžia funkcija *draw*(). Bendra kreipinio į šią funkciją forma yra

> *draw*([*obj1*(*obj1* parametrai), ..., *objn*(*objn* parametrai)], *globalūs parametrai*);

Čia *obj1*, ..., *objn* yra brėžiami objektai, *obj1* parametrai, ..., *objn* parametrai yra atskiri lokalūs šių objektų brėžimo parametrai, o *globalūs parametrai* taikomi visiems

brėžiamiems objektams. Visą informaciją apie brėžimo galimybes gauname, surinkę `?plot[options]`.

Pateiksime figūrų brėžimo pavyzdžių.

Tiesės ir atkarpos

```
> line(t1, x + y = 2, [x, y]), line(t2, x = y, [x, y]);
                                t1, t2
> point(A, 0, 5/4), point(U, 5, 50);
                                A, U
> segment(a, [A, U]);
                                a
> draw([t1, t2, a], labels = [x, y]);
```

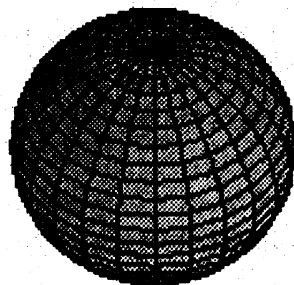
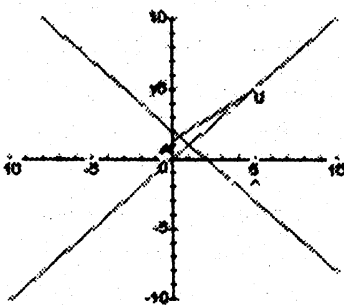
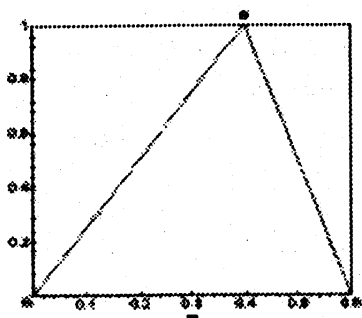
Trikampis

```
> point(A, 0, 0), point(B, 0.4, 1), point(C, 0.6, 0);
                                A, B, C
> triangle(T, [A, B, C]);
                                T
> draw(T);
```

Rutulys

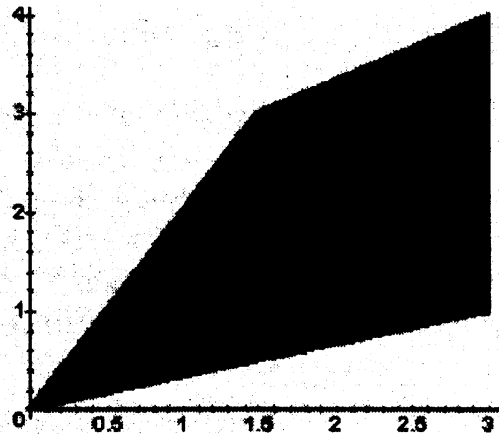
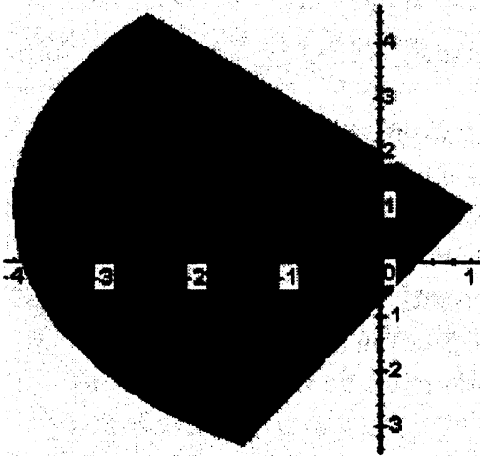
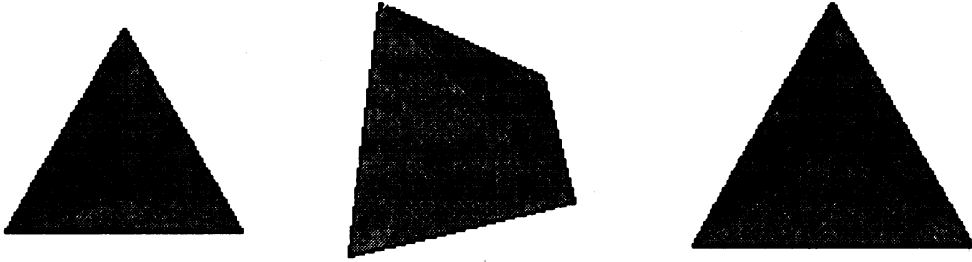
```
> with(geom3d) :
> sphere(s, x2 + y2 + z2 = 1, [x, y, z]);
> draw(s);
```

Po tokių komandų gauname šių figūrų brėžinius:



Taip pat nubrėžiami ir kiti geometriniai objektai – elipsės, apskritimai, hiperbolės ir t.t. Visas nubrėžtas figūras galime apžiūrėti iš visų pusių. Nubrėžta figūra sukasi, judinant „pelytę“, lyg vartytume ją rankomis.

Tai iš tiesų nuostabi galimybė! Kitas geometrinis paketas *plottools* papildo paketo *geometry* objektų sąrašą. Šis paketas paprastai sukuria brėžimo objektus, o jie pavaizduojami funkcija *plots*. Taip galime sukurti ir nubrėžti, pvz., daugiakampį (*polygon*), apskritimo lanką (*arc*), apskritimo išpjovą (*pieslice*).



5. Informacija apie geometrinius objektus

Šalia vizualizacijos įvairovės yra galimybė greitai gauti visą geometrijoje įprastą informaciją apie sukurtus objektus: atitinkamos funkcijos akimirksniu paskaičiuoja figūrų plotus, tūrius ir kitas charakteristikas, tikrina įvairias sąlygas ir teiginius. Mokymo požiūriu tai gal nėra labai naudinga. Mokytojas turi nuspręsti, ar greitas informacijos gavimas pakenkins mokymuisi (pvz., mokinys gali „įdarbinti“ kompiuterį užuot pats skaičiavęs trikampio plotą ar ieškojęs kokio geometrinio objekto lygties). Bendrą bet kokio sukurto objekto charakteristiką gauname, panaudoję funkciją *detail(obj)*. Ji visada pateikia mums objekto vardą, tipą, kai kurias pagrindines charakteristikas, tokias kaip koordinatės, lygtis ir kt. Pvz., po kreipinio $> detail(T)$; paketas mums atspausdintų informaciją apie sukurtą trikampį:

name of the object: T (objekto vardas T)

form of the object: *triangle2d* (objekto tipas – trikampis plokštumoje)

method to define the triangle: *points* (trikampio apibrėžimo būdas: taškai)

the three vertices: $[[0, 0], [4, 0], [4, 2]]$ (trys trikampio viršūnės)

Be to, galima sužinoti atskiras objekto charakteristikas. Pvz., *area(obj)* paskaičiuoja objekto plotą, *Equation(obj)* pateikia objekto lygtį. Kiekvienas objektas turi specifių, tik jam būdingų charakteristikų, jų paskaičiavimui taip pat yra specialios funkcijos. Įvairios su objektu susijusios sąlygos ar teiginiai tikrinami specialiomis funkcijomis, gaunamas atsakymas *true*, *false* arba *FAIL* (kai padaryta klaidų arba prašomos sąlygos tikrinimas nenumatytas). Pvz., sąlyga *AreCollinear(A, B, C)* tikrina, ar trys taškai yra vienoje tiesėje, *IsOnLine(A, l)* – ar taškas priklauso tiesei l ; *AreParallel(l, l1)* – ar

tiesės l ir l_1 yra lygiagrečios; $AreSimilar(T_1, T_2)$ – ar trikampiai panašūs ir t.t. Pagalbos sistemoje galima rasti visas su kiekvienu objektu susijusias sąlygas.

6. Palyginimas su mokomosiomis programomis

Reikia paminėti, kad yra sukurta ir specializuotų vien geometrijos mokymui skirtų mokomųjų programų. Jos nedidelės, taigi nereikia daug kompiuterio atminties. Turėdamas tokius paketus po ranka geometrijos mokytojas be abejonės gali praturtinti pamokas. Pvz., mokomoji programa „GEOMETRY“, sukurta firmoje LF SOFTWARE, teuzima 5 MB. Joje daug paruoštų uždavinių ir testų su keliais atsakymais. Besimokantysis turi pasirinkti teisingą atsakymą, o paketas iš karto jį arba pagiria, arba apgailestauja, kad atsakymas neteisingas. Tokios užduotys tinka ypač žemesnių klasių mokiniams, supažindinant su geometrijos mokslu apskritai, įvedant pagrindines geometrines sąvokas, mokant ilgio, kampo matavimų ir t.t. Pateiksime keletą šio paketo užduočių. Pvz., vartotojo klausama

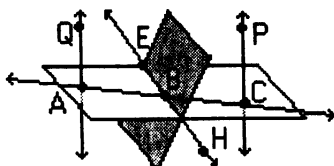
Kas laikomas geometrijos tėvu?

- A) Platonas B) Aristotelis C) Euklidas D) Aleksandras

Kuris atsakymas geriausiai nusako geometrines figūras?

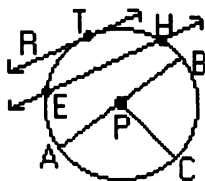
- A) Trikampiai, ketursieniai ir apskritimai B) Antikos graikų domėjimosi objektai C) Bet kokia tašku, tiesių ar plokštumų erdvėje aibė D) Nė vienas iš jų

Kurie iš šių taškų yra kolinearūs?



- A) Q, A, B B) P, C, B C) H, B, E D) Nė vienas rinkinys

Nurodykite apskritimo lietimosi tašką:



- A) T B) $\bar{E}\bar{H}$ C) R

Taip supažindinama su naujomis sąvokomis, mokoma teoremų, jų įrodymų, bet keli atsakymų variantai visada pateikiami. Paketo „mokytojas“ labai kantrus, mandagiai prašo kartoti dar kartą, jei atsakymas būna neteisingas. Geometrijos mokytojas kai kuriose pamokose gali pasinaudoti tokių paketų užduotimis, pagaliau brėžiniais, bet pakeisti jų

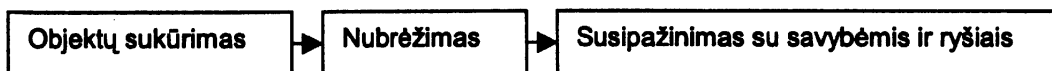
jis negali. Tai paruoštas statinis produktas, taigi jo tikslas visai kitoks negu mūsų nagrinėjamų paketų iš MAPLE. Pedagoginio universiteto matematikos ir informatikos specialybės studentai dabar jau mokomi kurti mokomasias programas patys, o kuriant turiningas, įdomias ir įvairias mokomasias programas tikrai gali padėti MAPLE įrankiai. Tereikia pasinaudoti objektų kūrimo, brėžimo ir įvertinimo pasirinkimo galimybėmis.

7. Išvados

Aptarę pagrindinius geometrinių paketų taikymo geometrijos mokymui aspektus, galime reziumuoti:

1. MAPLE geometriniais paketais galima sukurti visus įprastus geometrinius objektus visais geometrijoje priimtais objekto nusakymo būdais.
2. Sukurti objektai gali būti lyginami, tikrinamos jų savybės.
3. Kiekvieną objektą galima nubrėžti ir apžiūrėti variant.
4. Galima sužinoti objekto matmenis ir kitą informaciją.
5. Geometrijos mokymo metodologiniu požiūriu vertingiausia yra galimybė įvairiai kurti objektus ir juos nusibrėžti.

Nors kiekviename geometrinių paketų naudojimo žingsnyje yra įvairių pasirinkčių, bet geometrinių MAPLE paketų panaudojimo kelias paprastai panašus:



MAPLE geometriniai paketai kartu gali būti ir specialių geometrinių mokomųjų programų kūrimo įrankiai. Žinoma, mokytojo galimybės pasinaudoti šia sistema priklauso nuo turimų sąlygų. Netgi jei nėra kompiuterių klasės, kurioje galėtų vykti geometrijos pamokos, turėdamas vieną gerą kompiuterį, su MAPLE mokytojas gali pamokoms paruošti daug brėžinių, iliustracijų, įvairių uždavinių ir testų. Manome, kad kompiuterio panaudojimas geometrijos dėstyje gali išgelbėti krentantį geometrijos prestižą mokykloje.

Literatūra

- [1] Adresas internete: <http://www.maplesoft.com>.
- [2] V.N. Govoruchin ir V. G. Cybulin, *Vvedeniye v Maple* (rusų klb.), Mir, M. (1997).
- [3] V.P. Djakonov, *Matematičeskaja sistema MAPLE V* (rusų klb.), Solon, M. (1998).
- [4] J. Lipeikienė, *Matematika su kompiuteriu*, VI Tarptautinės mokslinės konferencijos „Švietimo reforma ir mokytojų rengimas“, Mokslo darbai, I dalis, 242–249 (1999).

Teaching geometry with computer

J. Lipeikienė

The article describes possibilities to use the geometrical packages of MAPLE for teaching geometry in secondary schools.