

# Kombinatorika, statistika, tikimybių skaičiavimas Lietuvos mokykloje

Pranas SURVILA (VPU)

el. paštas: *algebra@vpu.lt*

Sukako septyneri metai, kai į Lietuvos vidurinių mokyklų matematikos programą buvo įtraukta kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos tematika, kuriai 11 klasėje 1993/94m.m. buvo paskirta 30 valandų. Per tuos praėjusius septynerius metus nuveiktas nemažas darbas, pridaryta nemaža klaidų, keitėsi pats požiūris į tematikos apimtį, į jos pateikimo būdus, pateikimo vietą ir laiką. Atėjo laikas Matematikų draugijos auditorijoje-konferencijoje apžvelgti nueitą kelią, įvertinti mokytojų, mokymo literatūros rengėjų, programų rengėjų ir jų vertintojų, mokinių pastangas, nuveiktą darbą, aptarti padarytas ir daromas klaidas, bei numatyti šios tematikos vidurinėje mokykloje perspektyvas.

Reikia konstatuoti, kad tikimybių teorijos ir statistikos tematika vidurinės mokyklos matematikos programoje neatsirado netikėtai ir staiga. Ne kartą dar devintajame dešimtmetyje ir anksčiau teko girdėti, kaip Vytautas Liutikas siūlė įvesti tikimybių teorijos ir statistikos tematiką į vidurinių mokyklų matematikos programą. Lietuvos jaunųjų matematikų (pirmosios) neakivaizdinės mokyklos, veikusios nuo 1969 apie 20 metų, užduočių tematikoje buvo užduotis, skirta tikimybių teorijai ir matematinei statistikai, kurią ne kartą teko parengti ir šio teksto autoriui. Pasirodė V. Liutiko knygelės mokiniams „Kaip skaičiuoti įvykių tikimybes“ (1972) ir „Moksleiviui apie matematinę statistiką“ (1978), skirtos tikimybių teorijai ir statistikai populiarinti. Apie būtinumą keisti matematikos mokymo Lietuvos mokyklose programą, apie kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenų įtraukimą į vidurinės mokyklos matematikos kursą daug diskutuota 1990 metais Kaune vykusioje LMD XXXI konferencijoje. Diskusijose kalbėję Vyt.Statulevičius, Vyt.Liutikas, Pr. Survila, H. Jasiūnas ir kiti pasisakė už tai, kad reikia parengti naują originalią matematikos mokymo vidurinėje mokykloje programą, kurioje turėtų būti paskirta vietos ir kombinatorikos, tikimybių teorijos bei matematinės statistikos pradmenims. Buvo išpareigota iki 1991-ųjų metų pradžios parengti bent 3 naujos programos projektus. Šio straipsnio autorius dar 1990 metais parengė matematikos mokymo Lietuvos vidurinėje mokykloje programos projektą [1], kuriame buvo numatyta nuo 9 klasės matematikos mokyti diferencijuotai: 9–10 klasėse dviem lygiais – pagrindiniu ir aukštesniu, 11–12 klasėse trimis lygiais – elementariuoju-pažintiniu (humanitarinio profilio mokyklose), pagrindiniu – pažintiniu-taikomuoju (techninio-ekonominio profilio mokyklose), teoriniu – tikslųjų ir gamtamokslinių profilių mokyklose. Jame buvo numatyta kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenų mokyti pradėdant nuo 5 klasės koncentriškai, jungiant šią tematiką su kitomis tradicinėmis temomis: skaičiavimais, teksto uždavinių sprendimo mokymu ir tęsiant kiekvienoje klasėje iki dvyliktos.

Buvo siūlomi šitokie tematikos koncentrai. 5–6 klasėse – *nedeterminuoti dydžiai, aritmetinis vidurkis, negausių aibių sutvarkymų skaičiaus radimo uždaviniai; eksperimentai su atsitiktiniais rezultatais – loterijos, apklausa*, ir pan. 7–8 klasėse – *sudėtingesnė kombinatorika, imtys (matavimai) su trupmeniniais duomenimis, imties pateikimas lentele, jos grafinis vaizdavimas, atsitiktinumo sampratos formavimas, įvykių modeliavimas aibėmis*. 9–10 klasėse buvo numatoma mokyti *kombinatorikos* (aukštesniu centru) ir *tikimybių skaičiavimo* pasitelkiant kombinatoriką bei *imties skaitinių charakteristikų skaičiavimo*. 11–12 klasėse buvo siūloma tematika, kurią sudarė temos: *aibių algebra, įvykiai ir jų tikimybės* (įskaitant tikimybės savybes, Bernulio schema) ir *atsitiktiniai dydžiai su baigtiniu galimų reikšmių skaičiumi*. Programos projektas buvo ne kartą pristatytas: Lietuvos Matematikų draugijos seminare mokytojams, Lietuvos matematikų draugijos XXXII konferencijoje, vykusioje 1991 metais MII.

Tos programos projektas matematikams-mokslininkams pasirodė per daug elementarus, mokytojai jį palaikė per sudėtingu. Manychiau, jog jis pasirodė per anksti ir matematikos mokytojų buvo nesuprastas. 1993 metais pasirodė Pr. Gudyno ir A. Zabulionio Matematikos bendrosios programos projektas [1], kuriame taip pat buvo numatyta bendru „Statistikos“ vardu pavadinta tematika suskirstyta koncentrais. 5–8 klasių koncentrą sudarė *statistikos pradmenys* ir *tikimybės sampratos* formavimas. 9–10 klasių koncentras apėmė paprasčiausių *išvadų iš statistinių duomenų gavimo mokymą, junginių tipus, tikimybės sąvoką ir savybes, nepriklausomus bandymus ir atsitiktinio dydžio matematinę viltį*. 11–12-os klasių viename modulyje buvo numatyta tema: „*Tikimybiniai skirstiniai*“, o kitame modulyje „*Statistika*“.

Nors nuo 1991 metų pradžios iki 93/94 m.m. pradžios pasistengus galima buvo parengti ir išleisti elementarias (vieną arba kelias) kombinatorikos, statistikos, tikimybių skaičiavimo knygeles, kuriomis galėtų naudotis visų klasių matematikos mokytojai, dėl neoperatyvumo, o dalinai ir dėl ambicijų buvo nueita kitu keliu. Nebuvo atsižvelgta į Pr. Survilos programos projektą, ir „*kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos*“ tema buvo įtraukta į vienuoliktos klasės programą didelės apimties. Tais pačiais metais temai paskirta išėjo Aleksandro Plikuso knygelė [2], kurią teko recenzuoti rašymo metu, kuriai didelių priekaištų netektų daryti, tačiau ji tuo metu nemažai daliai matematikos mokytojų buvo sunkiai suprantama.

Buvo imtasi matematikos mokytojų kombinatorinės ir statistinės mąstysenos kvalifikacijos kėlimo. Vyko kvalifikacijos kėlimo kursai: LMKI, VPU, rajonuose. Specialiai kvalifikacijos kursams, vykusiems VPU, buvo parengtas ir net du kartus VPU leidyklos ir leidybos centro išleistas uždavinių rinkinys [6]. Nors gana greitai paaiškėjo, kad taip koncentruotai vienoje klasėje įvedus kombinatoriką, tikimybių teoriją ir statistiką faktiškai išmokyti neįmanoma, o 1996 metais išėjo ir populiaros kombinatorikos, statistikos ir tikimybių skaičiavimo knygelės [3] ir [4] bei knygelė skirta mokytojams [5], tačiau nebuvo ryžtasi išskaidyti tematikos koncentrais pradedant jos mokytis nuo 5 klasės. Buvo imtasi dalinių priemonių – nuo 1995/96 m.m. tema suskaidyta į dvi dalis: vienuoliktos klasėje – „*Kombinatorikos, tikimybių teorijos pradmenys*“; dvyliktoje klasėje – „*Statistikos pradmenys*“.

Metai iš metų vis geriau suprantama, jog mokinių kombinatorinę ir stochastinę mąstyseną galima išlavinti tik per eilę metų, pradedant nuo paprasčiausių kombinato-

rikos, statistikos, tikimybių skaičiavimo sampratų formavimo, elementarių uždavinių ir pereinant aukštesnėse klasėse prie sąvokų formavimo ir teorijos faktų pagrindimo. Jau atsisakyta programinių klaidų. Tematika išskaidyta į įvairias klases, pateikiama koncentrais. Tačiau vis dar užmirštama ją sieti su matematiniu modeliavimu, neretai stengiamasi apeiti tą faktą, kad negalima mokyti kombinatorikos ir nenaudoti žodžio ir sąvokos „aibė“, aiškinti, kas tai yra įvykis, ir užmiršti, jog eksperimento su atsitiktinėmis baigtimis matematinis modelis yra aibė su jos poaibiais, kad elementarieji įvykiai – aibės elementai (vienaelementiniai poaibiai), kad įvykiai – tai tos aibės poaibiai. Pasirodžiusiose knygelėse šia tematika ir matematikos uždavinių rinkiniuose vis dar pasirodo nemaža netikslumų, neteisingų (neapibrėžiančių objekto, eksperimento ir pan.) uždavinių formuluočių. Netgi laikomos kol kas svarbiausia mokomąja, A. Plikuso knygos abiejose laidose neišvengiama formuluočių netikslumų. Keli iš jų: kritikuotinas elementaraus įvykio sąvokos formavimas, nes nėra aptartas jų nesutaikomumas, nepaaiškinta sąvoka „įvykį laikysime elementariuoju“, 16 uždavinyje (35 psl.) neaišku, kas yra bandymas – ar tai dviejų monetų metimas 50 kartų, ar tai vienkartinis dviejų monetų metimas; 37 uždavinyje (46 psl.) neaišku, ką reiškia „vienas tomas yra savo vietoje“ – ar tai „tik vienas“, ar tai „bent vienas“. Taip pat tektų padaryti priekaištą dėl sąvokos „imties dispersija“ apibrėžimo. *Imties dispersija* yra imties skirstinio (imties santykinų dažnių lentelės) dispersija, t.y. dispersija atsitiktinio dydžio, turinčio empirinę pasikirstymo funkciją, apibrėžiamą imties santykinų dažnių lentele. Tikrosios *imties dispersijos* ir knygelėje apibrėžtos „imties disperijos“ santykis lygus  $\frac{n-1}{n}$ . Nors knygelės autorius turi teorinį pagrindą (atsitiktiniai dydžiai išdėstomi prieš statistiką) apibrėžiant imties dispersiją pasinaudoti tikrąją dispersijos sąvoką  $DX = E(X - EX)^2$  (69 psl.), tačiau to nedaro, o sąvokas „*imties vidurkis*“, „*imties dispersija*“ apibrėžia formaliai. To nereikėtų daryti knygelėje, skirtoje 11–12 klasėms. Be to tik deklaratyviai (63 ir 75 psl.) teigiama, kad *dispersija* yra *išbarstymo* matas. To fakto pagrindimui (pateikiant Čebyševio nelygybę nors ir be įrodymo) galima buvo sutaupyti vietos, bent jau antroje laidoje, atsisakius paragrafo 1.5, nes toliau, be sumos ženklo autorius apseina ir naudoja jį tik „dėl gražumo“ (žr. 61, 74 ir 75 psl.)

Apmaudu dar ir dėl to, kad be mano žinios esu įrašytas ir antrosios laidos recenzentu, nors, susiklosčius aplinkybėms, aš įntrąją knygelės laidą pavarčiau tik 2000-aisiais.

Gausu netikslumų ir net klaidų ekspertų neapčiuotose knygelėse. P. Grebeničenkaitės, E. Tumenaitės 1999 m. išleistoje knygoje „Prieš matematikos egzaminą“ 13 skyriaus 3, 6, 11, 15 uždavinių formuluočių netiksliai apibrėžia situaciją, 17 uždavinio sprendinys neteisingas, 14 skyriaus 9 uždavinyje neapibrėžtas eksperimentas. 1999 metais išleistai V. Mockaus, A. Jocaitės knygelei „Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys moksleiviams“, kurią galima būtų laikyti žinynu-uždavinynu, taip pat tenka daryti nemažą priekaištų. Joje kombinatorika nesiejama su aibėmis, nors kombinatorikos uždavinys yra tam tikru būdu sudarytos aibės elementų skaičiaus radimas, arba aibės sutvarkytų ar nesutvarkytų poaibių radimas. Naudojami senoviški junginių tipų apibrėžimai. Kartotiniai gretiniai neapibrėžti. Taisytiniai kartotinių kėlinių ir kartotinių derinių apibrėžimui. 37 psl. sakoma: „Deriniai iš  $n$  elementų po  $k$  elementų su pasikartojimais apskaičiuojami pagal formules“. Tuo pademonstruojama (gal per neapsižiūrėjimą),

kad autoriai neskiria objekto tipo nuo to tipo objektų skaičiaus (tipiška mokinių ir studentų daroma klaida). 73 psl. teigiama, jog „*kai kurie* įvykiai susideda iš elementariųjų“, „... elementarieji įvykiai yra poromis nesutaikomi ir *vienas iš jų yra būtinasis įvykis*“. 78 psl. naudojamas terminas „*įvykių lyginumas*“. Netiksliai apibrėžti: *atsitiktinis dydis* (119 psl.), *mediana* (imties) (135 psl.). Yra netikslumų ir uždavinių formuluotėse. Pavyzdžiui, 25 psl. – 16, 18, 26; 28 psl. – 1, 7 (sprendinys neatitinka sąlygos), 9 (ar vienodi dalykų vadovėliai); 76 psl. – 1, 2, 8 A; 89 psl. – 2 (sprendinys neteisingas). Nemaža priekaištų tekstų ir 1995 metais išleisti mokytojų A. Medžiaušienės ir M. Ščerbavičienės knygelei „Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys moksleiviams“ (Uždavinių sprendimo pavyzdžiai), kurioje pateikiami Survilos [6] ir Plikuso [2] knygelių uždavinių sprendimai, dėl klaidų sprendimuose gausos. Ypač paminėtinos klaidos (40 psl.) uždavinių 2.40 ir 2.41 sprendimuose, iš kurių matosi, jog autorės nevisai nesupranta sąvokas *elementarusis įvykis*, *įvykiui palankus elementarusis įvykis*.

Tenka konstatuoti, jog apmaudi klaida padaryta ir šių metų matematikos valstybinio egzamino 14 uždavinio 3 užduoties formuluotėje, kurioje sakoma „Tęsiant eksperimentą, ...“, nors nėra sąvokos „eksperimento tęsimas“. Eksperimentą galima tik kartoti arba atlikti kitą eksperimentą. Panaši klaida formuluotėje buvo daroma ir knygelėje „Į pagalbą abiturientui 2000. Matematika“ apie kurią buvo informuoti užduočių rengėjai, bet, jie arba nenorėjo dėti papildomų pastangų pataisymams padaryti, arba nesuvokė tos klaidos esmės.

Tipinės dažniausiai pasitaikančios klaidos kombinatorikos uždavinių formuluotėse yra pasirinkimo situacijos nepakankamas aprašymas. Tikimybių radimo uždaviniuose – netikslus eksperimento apibrėžimas, pasitaikantis dėl nesuvokimo, jog eksperimentą sudaro *tai kas vyksta* ir *tai kas registruojama* (kas stebima, kas svarbu subjektui). Pavyzdžiui, posakis „*Šaunama į taikinį*“ dar neapibrėžia eksperimento. Turi būti apibūdintas taikinyis ir kas registruojama – baigtis. Posakis „*metamas lošimo kauliukas*“ irgi neapibrėžia eksperimento. Turi būti pasakyta, kokios formos, simetrinis ar ne, kuo skiriasi šonai, kas registruojama.

Knygelių kombinatorikos, statistikos ir tikimybių teorijos tematika autoriams patartina būti atidesniems parenkant arba kuriant uždavinius, o jų recenzentams matematikams-mokslininkams būti atsakingesniems rašant teigiamas recenzijas.

Nepretenduojant į išsamesnę nūdienos „Kombinatorikos, statistikos, tikimybių skaičiavimo“ mokymosi Lietuvos vidurinėje mokykloje padėties analizę, džiugu konstatuoti, jog to imamasi rimtai: tematika įtraukiama į visų klasių programas, parengtuose ir rengiamuose vadovėliuose jai skiriama vietos, natūralu tapo traukti jos uždavinius į baigiamuosius egzaminus. Svarbu konstatuoti tai, jog mokytojai irgi suprato tematikos reikšmę, jos svarbą, nelaiko jos primesta ir įgijo žinių bei patirties rengdamiesi temą dėstyti, o dar daugiau – ją dėstydami.

## Literatūra

[1] *Matematikos programos*, Leidybos centras (1994).

[2] A. Plikusas, *Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys*, Kaunas, Šviesa (1993); II-ji laida, Kaunas, Šviesa (1998).

- [3] P. Survila, *Kombinatorikos ir statistikos pradžiamokslis*, Vilnius, Pašėkšta (1996).
- [4] P. Survila, *Statistikos, kombinatorikos, tikimybių skaičiavimo pradžiamokslis*, 2, Vilnius, Leidybos centras (1996).
- [5] P. Survila, *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimas pagrindinėje mokykloje*, Vilnius, Eugrimas (1996).
- [6] P. Survila, *Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos uždavinių rinkinys*, Vilnius, Leidybos centras (1994).

## **Combinatorics, statistics, probability calculus in the secondary school in Lithuania**

P. Survila

The analysis of Lithuanian textbooks on combinatorics, statistics and elementary probability is presented. The methodological approach of the current teaching programme is discussed. The definitions of some notions are criticized and the alternatives suggested.