Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 365–372

Optimizacijos uždaviniai statinių pamatams

Rimantas BELEVIČIUS, Saulius VALENTINAVIČIUS (VGTU)
el. paštas: rb@fm.vtu.lt, sv@matrix-software.lt

1. Įvadas

Statinių projektavimo metu visos statinio dalys turi būti suprojektuotos kiek galima optimaliau ir taupiau, kiek tik leidžia saugumo ir eksploatacijos sąlygos. Šis darbas yra skirtas labai plačiai naudojamų rostverkinio tipo statinių pamatų optimizavimui. Tokius pamatus sudaro į pagrindą-gruntą sukalti poliai, apjungti į juos besiremiančia sija. Optimaliai suprojektuotame rostverkiniame pamate poliai yra išdėstyti taip, kad atraminės reakcijos juose yra lygios ir neviršija leistinosios reakcijos poliui, jungiamojoje sijoje veikiantys lenkimo momentai pasiskirsto taip pat tolygiai ir yra kiek galima maži. Idealu būtų, jei abu tikslai būtų pasiekiami vienu metu.

Viso to galima pasiekti keičiant polių standžius, ilgius, polių pozicijas sijoje. Be abejo, technologiniais sumetimais patogiausia naudoti vienodus polius, o keisti tik polių pozicijas. Esant silpnam gruntui, poliai gali būti įspūdingo ilgio (iki 30m), ir kiekvienas sutaupytas polius duos ženklią ekonomiją.

Darbas atliktas Olandijos programinės įrangos firmos Matrix Software užsakymu ir yra įdiegtas į Europoje platinamą statinių analizės ir projektavimo programinį paketą *MatrixFrame*. Be abejo, Olandijai, kurios dauguma statinių pastatyti ant labai silpnų (dažnai ir iš jūros atkovotose žemėse) pagrindų, tokie pamatų optimizavimai yra itin aktualūs.

Taigi, darbo tikslai yra:

- sukurti matematinius modelius pamatams ir pamatų sijoms optimizuoti (kriterijai: atraminės reakcijos, lenkimo momentai sijoje, reakcijos/momentai kartu),
- sukurti ir įdiegti į komercinius *MatrixFrame* paketus programas reakcijų, lenkimo momentų ir reakcijų/momentų optimizavimui.

Reikalavimai uždaviniui:

- optimumo siekiama keičiant atramų pozicijas, kiekį, bet išsaugant atramų charakteristikas,
- atramos yra standžios ir spyruoklinės; jų charakteristikas teikia programų vartotojai,
- maksimalus atramų kiekis sijoje – iki 100,
- visos apkrovos (koncentruotos jėgos, tiesiniu dėsniu paskirstyti slėgiai, lenkimo momentai) yra fiksuotos,
- analizės uždavinys – statinis, tiesinis.

Kadangi darbas turėjo būti įdiegtas į komercinį programinį paketą, tikslams realizuoti pasirinkti išbandyti ir patikimi darbo įrankiai:

- baigtinių elementų metodas reakcijoms, lenkimo momentams skaičiuoti,
- analitinė jautrumo analizė reakcijoms ir momentams (atramų koordinačių atžvilgiu),
- tiesinio programavimo metodai optimizavimui.

Be abejo, paskutinysis mūsų pasirinkimas gali būti kvestionuojamas. Esant dideliam uždaviniui, tiesiniu programavimu pasiekti globalų minimumą yra praktiškai neįmanoma. Šią problemą turėjome omenyje ir sprendėme pusiau inžineriniais metodais, o pasirinkimą nusvėrė turimos išbandytos patikimos tiesinio programavimo programos.

2. Uždavinio formulavimas

Minimizuoti (leistinose topologijos formose) maksimalų struktūros parametrą P visiems apkrovų atvejams.

Uždavinys keičiamas į grynai minimumo uždavinį, visuose projektavimo pokyčiuose (= atramų koordinačių pokyčiuose) Δt_i nagrinėjant $P_{\max}$ kaip nežinomąjį visai uždavinio sričiai x:

$$P(x) + \sum_i P(x)'_{t_i} \Delta t_i - P_{\max} \leqslant 0. \tag{1}$$

Parametras P yra arba atraminės reakcijos poliuose, arba lenkimo momentai jungiančiojoje sijoje, baigtinių elementų tinklelio mazguose.

Papildomas ribojimas sijos ilgiui L (aktualus atvejams, kai atrama yra sijos pradžioje ar gale):

$$L = \overline{L}, \tag{2}$$

$$L + \sum_i L'_{t_i} \Delta t_i - \overline{L} = 0. \tag{3}$$

Optimizavimo technika – "move limit technique" [1,2]: įvedamos absoliučios maksimalios ir minimalios ribos projektavimo kintamiesiems – koordinatėms atramų koordinačių pokyčiams:

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}^{\max} \geqslant \mathbf{0}, \\ &\mathbf{T}^{\min} \leqslant \mathbf{0}, \\ &\mathbf{T}^{\min} \leqslant \mathbf{T} \leqslant \mathbf{T}^{\max}. \end{aligned} \tag{4}$$

$\mathbf{T}$ – dabartinis projektavimo kintamųjų būvis, tiesiog atramų koordinatės.

Įvedamos analogiškos ribos vienai iteracijai bei tarpiniai visad teigiami kintamieji:

$$\Delta\mathbf{T}^{\min} \leqslant \Delta\mathbf{T} \leqslant \Delta\mathbf{T}^{\max},$$

$$\begin{aligned}
&\Delta \mathbf{T}^{+} \geqslant \mathbf{0}, \\
&\Delta \mathbf{T} = \mathbf{T}^{+} + \Delta \mathbf{T}^{\min}, \\
&\Delta \mathbf{T}^{+} \leqslant \Delta \mathbf{T}^{\max} - \Delta \mathbf{T}^{\min}, \\
&\Delta \mathbf{T}^{+} + \Delta \tilde{\mathbf{T}} = \Delta \mathbf{T}^{\max} - \Delta \mathbf{T}^{\min}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Galutinė uždavinio formuluotė tampa tokia:

Minimizuoti $P_{\max}$,

su apribojimais:

P *lygis struktūroje* $\leqslant P_{\max}$: $\mathbf{P} + [P]_{,\mathrm{T}} \Delta \mathbf{T} - \mathbf{P}_{\max} \leqslant \mathbf{0}$, *arba*

$[I]\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{1}P_{\max} + [P]_{,\mathrm{T}}\Delta \mathbf{T}^{+} = -\mathbf{P} - [P]_{,\mathrm{T}}\Delta \mathbf{T}^{\min}$.

Projektavimo pokyčiai neviršija iteracijos ribų ir neviršija absoliučių ribų:

$\Delta \mathbf{T}^{+} + \Delta \tilde{\mathbf{T}} = \Delta \mathbf{T}^{\max} - \Delta \mathbf{T}^{\min}$.

Modelio ilgis pastovus : $L + \sum [L^e]_{,\mathrm{T}} \Delta \mathbf{T} = \overline{L}$.

Aišku, kad tiek atraminių reakcijų, tiek lenkimo momentų minimizavimo uždaviniai yra netiesiniai. Todėl uždaviniai sprendžiami iteracijomis kaip daugmaž tiesinių uždavinių sekos. Kiekvienoje iteracijoje esama modelio geometrinė forma keičiama į geresnę kaimyninę formą. Tai reikalauja:

– baigtinių elementų sprendinio,
– jautrumo analizės atramų koordinačių atžvilgiu,
– optimalaus perplanavimo tiesinio programavimo metodais.

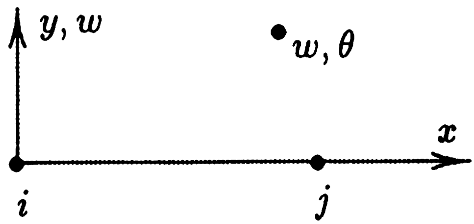
Kiekvienoje iteracijoje turi būti kontroliuojami projektavimo kintamųjų pokyčiai, kad uždavinį būtų įmanoma spręsti kaip tiesinį uždavinį; t.y., kad tiesinio programavimo metodų numatymai norimu tikslumu sutaptų su baigtinių elementų atsaku.

3. Baigtinis elementas. Jautrumo analizė

Polius jungianti sija aproksimuojama lenkiamo strypo baigtiniu elementu. Polius, remiantis siją, idealizuojamas atramine reakcija. Reakcijų skaičiavimo tikslumui baigtinio elemento sudėtingumas neturi jokios įtakos, todėl pasirinktas paprasčiausias ir „greičiausias“ dviejų mazgų su dviem laisvumo laipsniais (įlinkiu ir posūkiu) mazge elementas [3], žr. 1 pav.

Mazginių laisvumo laipsnių vektorių sudaro mazgų i ir j įlinkiai ir posūkiai plokštumoje $x - y$, o interpoliacinės funkcijos jiems yra [3]:

$$\mathbf{u} = \{w_i, \theta_i, w_j, \theta_j\}^T, \tag{6}$$



1 pav. Baigtinis elementas. Laisvumo laipsniai.

$$[N] = \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{array} \right\}. \tag{7}$$

Įtempiai-įrąžos – lenkimo momentai mazguose priklauso nuo įlinkių antrųjų išvestinių ir sijos skerspjūvio inercijos momento I bei medžiagos Jungo modulio E:

$$\sigma = \{M_i, M_j\}^T, \tag{8}$$

$$M = -EIw_{'xx} = EI \sum_i N_{i'xx} u_i. \tag{9}$$

Jautrumo atramų koordinačių atžvilgiu analizė. Kadangi formos funkcijos yra paprastos net ir neįvedant jokių specialių lokaliųjų koordinačių sistemų, jautrumo analizė atliekama analitiškai. Detalios išvestinių išraiškos gan ilgos, todėl apsiribosime tik pagrindinėmis priklausomybėmis. Turint omeny ankstesnes baigtinio elemento priklausomybes, lenkimo momentų ir reakcijų išvestinės gaunamos taip (viršutinis indeksas a žymi baigtinių elementų ansamblį, $[K]$ yra standumo matrica):

$$\mathbf{M}_{'x_k} = -EI \sum_i (N_{i'xxx_k} u_i + N_{i'xx} u_{i'x_k}), \tag{10}$$

$$\mathbf{R}_{'x_k} = [K]^a_{'x_k} \mathbf{u}^a + [K]^a \mathbf{u}^a_{'x_k}. \tag{11}$$

Kebliau suskaičiuoti mazginių kintamųjų išvestines:

$$[K]^a \mathbf{u}^a_{'x_k} = \overline{\mathbf{P}}^a, \tag{12}$$

$$\overline{\mathbf{P}}^a = \mathbf{P}^a_{'x_k} - [K]^a_{'x_k} \mathbf{u}^a. \tag{13}$$

Išvestinių ansamblio matrica formuojama iš atskirų elementų matricų išvestinių 1-ojo arba 2-ojo mazgo koordinačių atžvilgiu priklausomai nuo, kuriuo baigtinio elemento mazgu yra k-asis ansamblio mazgas. Jei mazgas elementui išvis nepriklauso, elemento išvestinė standumo matrica yra nulinė.

4. Programa

Programos branduolį sudaro 2-ame skyriuje minėtos trys procedūros: baigtinių elementų sprendikas, jautrumo analizės programa ir optimalaus perplanavimo simplekso metodu programa. Grafiniai prieš- ir poprocesoriai – iš *MatrixSoftware* paketo aplinkos.

Branduolio savybės yra:

– programa yra „vieno mygtuko programa",

– yra priešprocesorius kvazioptimalios topologijos generavimui, pasitelkiant visas ekspertines žinias,

– optimizavimui: „mazgų-šeimininkų" išskyrimas, automatinis iteracijos ribų parinkimas ir smulkinimas artėjant prie optimumo taško, topologijos keitimo galimybės susitinkant „mazgams-šeimininkams" tarpusavyje ar su nejudama standžia ar spyruokline atrama,

– duomenys: tik modelio ilgis, leistinoji reakcija, leistinasis atstumas tarp gretimų atramų, leistinasis įlinkis, apkrova, skerspjūvių ir medžiagų charakteristikos.

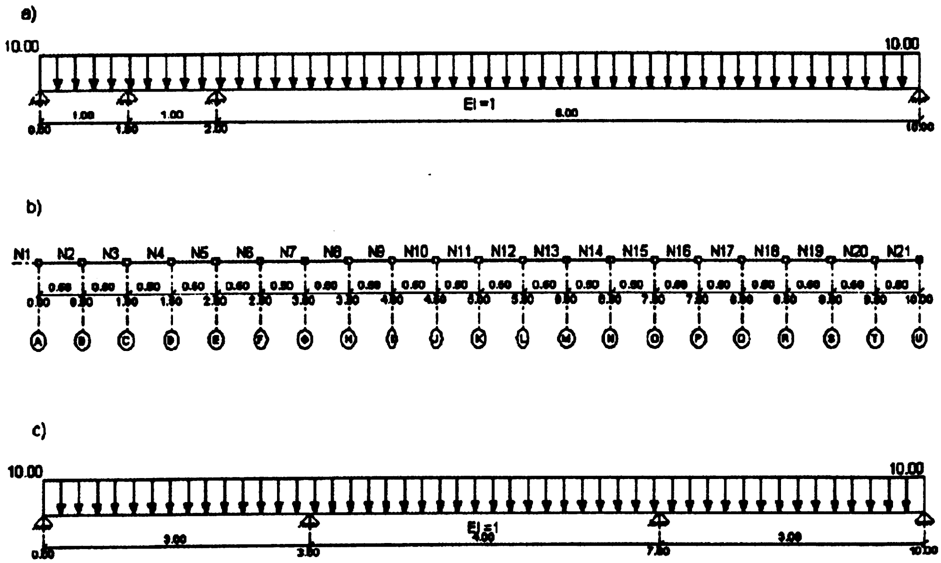
Anksčiau minėta lokalaus minimumo problema sprendžiama pasitelkiant specialią programą-priešprocesorių, kuris teiktų pradinį pamato modelį, jau artimą optimaliam. Tai – sudėtingiausia visos optimizavimo programos dalis; tam panaudojamos visos mūsų ekspertinės žinios. Ši programos dalis garantuoja, kad optimizuodami nepakliūtume į visiškai neįdomų lokalųjį minimumą.

Pradiniai duomenys šiam priešprocesoriui ateina iš *MatrixFrame* grafinių langų. Tai – tik sijos ilgis, skerspjūvio medžiagos ir charakteristikos, apkrova bei leistinosios reakcijos, minimalaus atstumo tarp polių ir maksimalaus įlinkio reikšmės. Programa apytiksliai suskaičiuoja reikiamą idealiu atveju atramų kiekį (arba priimamas vartotojo teikiamas kiekis) ir, išanalizavusi apkrovas, sudėlioja atramas į labiausiai tikėtinas pozicijas sijoje. Jos dėliojamos taip, kad kiekvienai tektų apytiksliai vienodos apkrovos dalys. Vėliau generuojamas baigtinių elementų tinklelis ir paleidžiamos analizės bei optimizavimo programos. Nesudėtingos apkrovos atveju optimizavimo procedūros pradinį planą mažai ir tepakeičia. Jei leistinoji reakcija viršijama uždavinys kartojamas su vienetu didinamu atramų kiekiu, ir t.t. iki įvesto ribinio atramų skaičiaus.

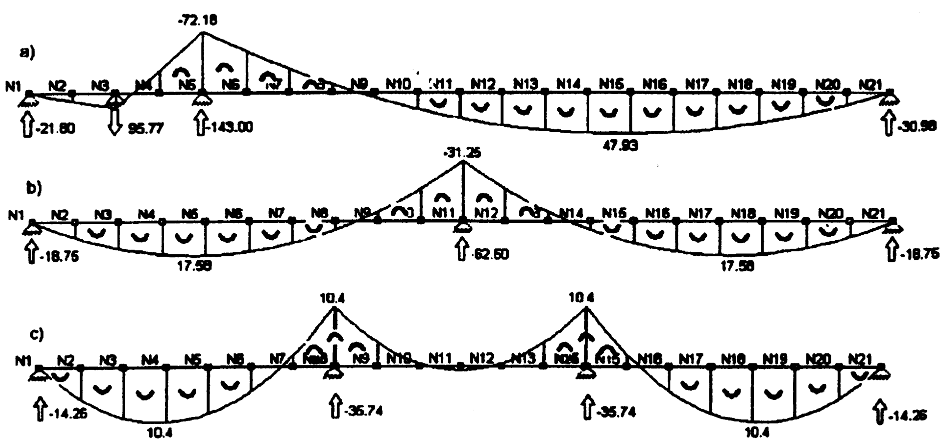
Programa minimizuoja atramines reakcijas, arba lenkimo momentus sijoje, arba kartu reakcijas ir momentus. Šis trečiasis uždavinys sprendžiamas pusiau inžineriškai, kadangi nepavyko surasti tikslo funkcijos, garantuojančios minimalias reakcijas ir momentus kartu; šie du kriterijai tarpusavyje sunkiai dera. Schematiškai sprendimas atrodo taip: pirmiausia optimizuojamos reakcijos ir, pasiekus leistinąją atraminę reakciją, pereinama prie momentų minimizavimo. Viršijus leistinąją reakciją, vėl sugrįžtama prie reakcijų minimizavimo, ir t.t. Uždavinys baigiamas išsilyginus lenkimo momentams sijoje ir reakcijoms neviršijant ribinės reakcijos reikšmės.

5. Pavyzdžiai

1. Lenkimo momentų optimizavimas



2 pav. Pradinės schemos I ir II. Baigtinių elementų tinklelis.



3 pav. Momentai schemai I ir optimizavimo rezultatai (30 iteracijų). Optimizavimo rezultatai schemai II (15 iteracijų).

2. Reakcijų optimizavimas

1 pavyzdys. Schemai I pradinės reakcijos:

$$R_{\max} = 95.77 \quad \text{mazge} \quad 3,$$
$$R_{\min} = -143.0 \quad \text{mazge} \quad 5.$$

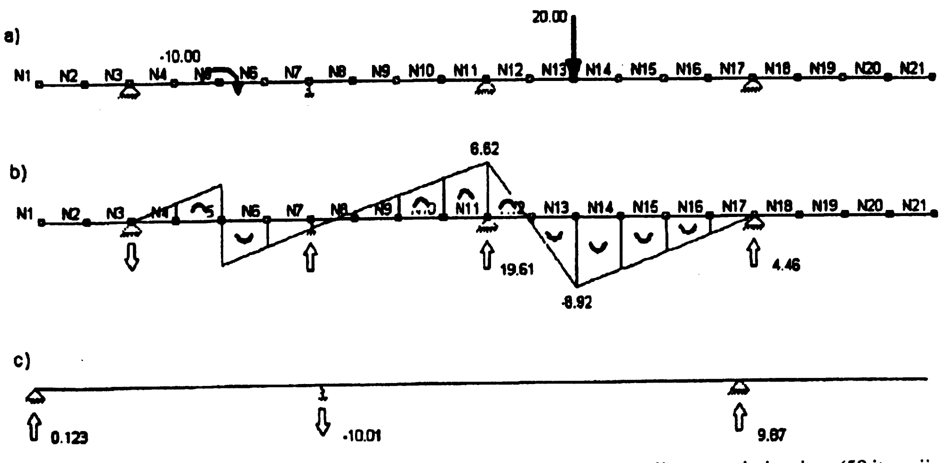
Po 20-ies iteracijų ir pašalinus vieną iš sutampančių atramų:

$$R_{\max} = -18.75 \quad \text{mazge} \quad 1,20,$$
$$R_{\min} = -62.50 \quad \text{mazge} \quad 10$$

(atramų koordinatės 0.0, 5.0, 10.0).

Schemai II gaunami tiksliai tokie pat rezultatai.

2 pavyzdys.



4 pav. Sija su skirtingo tipo atramomis. Pradiniai momentai ir reakcijos. Reakcijos po optimizavimo (58 iteracijos).

3. Bendrasis momentų/reakcijų optimizavimo uždavinys

Inžinerinis sprendimas tikslo funkcijai:

a) optimizuoti reakcijas, kol pasiekiama leistinoji reakcija;

b) optimizuoti momentus tol, kol neviršijama leistinoji reakcija; viršijus – grįžti prie reakcijų optimizavimo, ir t.t.

Rezultatai schemai iš 1 pav. (leistinoji reakcija – 100):

$$M_{\max} = 12.00,$$

$$M_{\min} = -12.00,$$
$$R_{\max} = -13.68,$$
$$R_{\min} = -37.4.$$

Atramų koordinatės: 0.00, 3.65, 6.67, 10.00.
Rezultatai schemai iš 3 pav. (leistinoji reakcija – 15):

$$M_{\max} = 3.13,$$
$$M_{\min} = -7.74,$$
$$R_{\max} = 12.42,$$
$$R_{\min} = 2.73.$$

Atramų koordinatės: 0.00, 2.10, 5.30, 7.10.

Literatūra

[1] P. Pedersen, Design for minimum stress concentration – some practical aspects, *Structural Optimisation*, Kluwer Academic, 225–232 (1988).
[2] R. Belevičius, Shape optimisation of laminated orthotropic plate structures, *Mech. of Composite Mater.*, **29**, 537–546 (1993).
[3] R.D. Cook, D.S. Malkus and M.E. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Method*, John Wiley & Sons (1989).

Optimization problems for construction foundations

R. Belevičius, S. Valentinavičius

The mathematical models for optimization of grillage-type foundations are presented. Minimising of maximum in absolute value vertical reactive force, bending moment, and reaction-bending moment together is sought. Solutions of a number of problems demonstrate the validity of proposed algorithms.