LMD mokslo darbai, III tomas, 93–99

Tikimybinė skaičių teorija ir kontinumas

Vilius STAKĖNAS* (VU)
el. paštas: vilius.stakenas@maf.vu.lt

Tikimybinės skaičių teorijos sekos

Tikimybinėje skaičių teorijoje tiriamas dažnių

$$\nu_x\{f(n) \in B\} = \frac{1}{[x]}\#\{n \leqslant x : f(n) \in B\}$$

elgesys, kai $x \to \infty$. Aritmetinė funkcija f dažniausiai būna adityvioji ar multiplikatyvioji, tiek f, tiek B dažnai priklauso nuo x. Pagrindinė metodologinė idėja, išplėtota J. Kubiliaus monografijoje [1] – tokių dažnių aproksimacija atitinkamais su nepriklausomais atsitiktiniais dydžiais susijusiais skirstiniais. Adityviosios funkcijos atveju suformuluosime šią idėją šitaip. Su skaičiumi $r \geqslant 2$ apibrėžkime

$$f_r(m) = \sum \{f(p^\nu) : p^\nu || m, p^\nu < r\}.$$

Tada egzistuoja neaprėžtai auganti funkcija $r(x)$, kad tolygiai pagal visus poaibius B ir adityviąsias funkcijas f

$$\nu_x\{f_r(n) \in B\} - P\Big(\sum_{p<r} X_{p,r} \in B\Big) \to 0 \quad (x \to \infty); \tag{1}$$

čia $X_{p,r}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, įgyjantys reikšmes toje pat aibėje kaip ir f ir silpnai konverguojantys, kai $x \to \infty$, į atsitiktinius dydžius X_p:

$$P\Big(X_p = x\Big) = \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sum \Big\{\frac{1}{p^\nu} : \nu \geqslant 0, f(p^\nu) = x\Big\}.$$

Šis modelis daugybę kartų taikytas ir tirtas įvairiuose kontekstuose. Apsiribokime natūraliaisiais skaičiais ir nagrinėkime adityviąsias funkcijas kokioje nors natūraliųjų skaičių sekoje

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \quad (a_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

*Mokslinį darbą remia Lietuvos Mokslo ir Studijų Fondas.

Šią seką natūralu pavadinti tikimybinės skaičių teorijos seka, jei sąryšis (1) lieka teisingas pakeitus jame dažnį $\nu_x\{f_r(m) \in B\}$ dažniu

$$\nu_x\{f_r(a_n) \in B\} = \frac{1}{[x]}\#\{n \leqslant x : f_r(a_n) \in B\}.$$

Tačiau galima suformuluoti ir paprastesnį apibrėžimą.

Apibrėžimas. *Natūraliųjų skaičių seką* $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \quad (a_n \to \infty, n \to \infty)$ *vadinsime tikimybinės skaičių teorijos seka, jei su bet kokia sveikųjų skaičių pora* $0 \leqslant l < Q$ *teisingas asimptotinis sąryšis*

$$\frac{1}{x}\#\{n \leqslant x : a_n \equiv l \ (\mathrm{mod}\ Q)\} \to \frac{1}{Q} \quad (x \to \infty). \tag{2}$$

Palyginti nesunku įsitikinti (žr. pavyzdžiui, analogišką konstrukciją Elliott'o knygoje [2]), kad taip apibrėžtai tikimybinės skaičių teorijos sekai iš tikrųjų egzistuoja neaprėžtai didėjanti funkcija $r(x)$ su sąlyga, kad tolygiai pagal visus poaibius B ir adityviąsias funkcijas f (1) sąryšis teisingas su dažniu $\nu_x\{f_r(a_n) \in B\}$.

Tikimybinės skaičių teorijos sekų yra daug

Deja, žinant, kad jų daug, rasti bent kelias vistiek sunku. Tai tipiška metrinės skaičių teorijos situacija.

Tegu $q \geqslant 2$ yra natūralusis skaičius (naudosime jį kaip skaičiavimo sistemos pagrindą), o α – vienetinio intervalo $(0, 1)$ skaičius. Tegu

$$\alpha = \frac{d_1}{q} + \frac{d_2}{q^2} + \ldots =_{(q)} 0, d_1 d_2 \ldots, \qquad d_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}.$$

Sudarykime natūraliųjų skaičių seką $[q^n\alpha] =_{(q)} d_1 d_2 \ldots d_n$, čia $[\cdot]$ reiškia skaičiaus sveikąją dalį, o indeksu (q) nurodome, kad užrašą reikia suprasti kaip išraišką skaičiavimo sistemoje q pagrindu. Ar seka $[q^n\alpha]$ yra tikimybinės skaičių teorijos seka? Lengva nurodyti α, kad taip nebūtų. Tačiau teisinga tokia teorema.

1 teorema. *Su beveik visais* $\alpha > 0$ *natūraliųjų skaičių seka* $[q^n\alpha]$ *yra tikimybinės skaičių teorijos seka.*

Šis teiginys išplaukia iš 2 teoremos; ja pasirėmę galime parodyti, kad yra daug ir kitokių tikimybinės skaičių teorijos sekų.

2 teorema. *Tegu* $0 \leqslant m_n < M_n$ *yra aprėžtos natūraliųjų skaičių sekos,* b_n *– neaprėžtai didėjanti realiųjų skaičių seka. Realiajam skaičiui* $\alpha > 0$ *pažymėkime* $B(n, \alpha) = [b_n\alpha]$. *Tada* *beveik visiems $\alpha > 0$ su bet kokiu $\epsilon > 0$*

$$\begin{aligned}&\#\{n \leqslant N : B(n,\alpha) \equiv m_n \,(\mathrm{mod}\, M_n)\}\\ &= \sum_{n\leqslant N} \frac{1}{M_n} + O\big(\Psi(N)^{1/2}(\log \Psi(N))^{3/2+\epsilon}\big),\end{aligned} \tag{3}$$

čia

$$\Psi(N) = \sum_{m\leqslant N} \Big\{\frac{N-m}{b_m} + \frac{1}{b_m}\sum_{n<m} b_n\Big\}.$$

Beveik akivaizdu, kad su $b_n = q^n$ ir $M_n \equiv Q$, iš 2 teoremos gausime, jog egzistuoja $R_Q \subset [0,+\infty)$, $\lambda(R_Q^c) = 0$, kad visiems $\alpha \in R_Q$ ir $1 \leqslant Q$ (2) sąryšis teisingas; čia ir toliau λ žymi Lebego matą. Tada su visais $\alpha \in \liminf R_Q = R$ αb_n yra tikimybinės skaičių teorijos seka. Tačiau $\lambda(R^c) = 0$, taigi 1 teorema išplaukia iš 2 teoremos.

Svarbiausias 2 teoremos įrodymo elementas – analizinė lema. Jos variantas įrodytas V. Sprindžiuko knygoje [4] (knygoje nurodomi ankstesni šaltiniai), mums reikalingas kiek bendresnis teiginys, (žr. [4], Lemma 1.5, p.13).

Lema. *Tegu X yra erdvė su matu μ, $0 < \mu(X) < \infty$, o $f_k(x)$ $(k = 1,2,\ldots)$ neneigiamų μ-mačių funkcijų seka, su skaičiais $0 \leqslant f_k \leqslant \varphi_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ tenkinanti sąlygą*

$$\int_X \Big(\sum_{u\leqslant k\leqslant v} (f_k(x) - f_k)\Big)^2 dx \leqslant K \sum_{u\leqslant k\leqslant v} \varphi_k;$$

čia K yra absoliuti konstanta, o $u < v$ bet kokie natūralieji skaičiai. Tada su kiekvienu $\epsilon > 0$ ir beveik visiems x teisingas sąryšis

$$\sum_{k\leqslant N} f_k(x) = \sum_{k\leqslant N} f_k + O\big(\Phi(N)^{1/2}(\log(\Phi(N)+2))^{3/2+\epsilon} + \max_{k\leqslant N} f_k\big),$$

čia

$$\Phi(N) = \sum_{n\leqslant N} \varphi_n.$$

2 teoremos įrodymas. Pakanka (3) lygybę įrodyti, beveik visiems $\alpha \in X, X = [A, A+1), A > 0$. Žymėkime

$$\mathcal{B}_n = X \cap \{\alpha : B(n,\alpha) \equiv m_n \,(\mathrm{mod}\, M_n)\} \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Taikysime lemą su $f_n(x) = I(x, \mathcal{B}_n)$ ($I(\cdot, A)$ žymime aibės A indikatorių) ir

$$f_n = \int_X f_n(x)dx = \lambda(\mathcal{B}_n). \tag{4}$$

Dydžius φ_m pasirinksime pertvarkę integralą

$$I(u,v) = \int_X \Big(\sum_{u \leqslant k \leqslant v} (f_k(x) - f_k)\Big)^2 dx.$$

Akivaizdu, kad

$$I(u,v) = \sum_{u \leqslant m \leqslant v} C(m,m) + 2 \sum_{u \leqslant n < m \leqslant v} C(n,m),$$

čia

$$C(n,m) = \int_X (f_m(x) - f_m)(f_n(x) - f_n) dx = \int_X f_m(x) f_n(x) dx - f_m f_n.$$

Taigi galime imti

$$\varphi_m = C(m,m) + 2 \sum_{n<m} C(n,m). \tag{5}$$

Vertinsime dydžius φ_m iš viršaus. Akivaizdu, kad

$$C(m,m) = f_m(1 - f_m) \leqslant f_m, \quad C(n,m) = \lambda(\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m) - f_n \cdot f_m. \tag{6}$$

Sąryšis $B(n,\alpha) \equiv m_n \pmod{M_n}$ ekvivalentus lygybei

$$B(n,\alpha) = [b_n \alpha] = m_n + sM_n,$$

čia s yra sveikas neneigiamas skaičius. Iš šios lygybės gauname

$$\alpha \in J(n,s), \quad J(n,s) = \Big[\frac{sM_n + m_n}{b_n}, \frac{sM_n + m_n}{b_n} + \frac{1}{b_n}\Big).$$

Skirtingiems s intervalai $J(n,s)$ nesikerta ir

$$\mathcal{B}_n = \bigcup_s (X \cap J(n,s)).$$

Visi intervalai $J(n,s)$ yra vienodo ilgio, taigi

$$\lambda(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{b_n} \#\{s : J(n,s) \subset X\} + O\Big(\frac{1}{b_n}\Big). \tag{7}$$

Sąlyga $J(n,s) \subset X$ ekvivalenti nelygybėms

$$A \leqslant \frac{sM_n}{b_n} + \frac{m_n}{b_n} < \frac{sM_n}{b_n} + \frac{m_n + 1}{b_n} \leqslant A + 1.$$

Šias nelygybes savo ruožtu galima pertvarkyti taip:

$$A\frac{b_n}{M_n} - \frac{m_n}{M_n} \leqslant s < A\frac{b_n}{M_n} - \frac{m_n}{M_n} + \frac{b_n - 1}{M_n}.$$

Skaičių s, tenkinančių šią sąlygą yra $b_n/M_n + O(1)$. Tada iš (4), (7) gauname

$$f_n = \frac{1}{M_n} + O\Big(\frac{1}{b_n}\Big). \tag{8}$$

Vertinsime $\lambda(\mathcal{B}_k \cap \mathcal{B}_l)$ $(k < l)$ pradėdami nuo akivaizdžios nelygybės

$$\lambda(\mathcal{B}_k \cap \mathcal{B}_l) \leqslant \sum_t{}^{*} \sum_s \lambda(J(k,t) \cap J(l,s)), \tag{9}$$

čia $*$ žymi, kad sumuojama pagal tuos t, kuriems $J(k,t) \cap X \neq \emptyset$. Kaip nustatėme anksčiau, tokių t yra $b_k/M_k + O(1)$. Vidinė suma neviršija dydžio

$$\frac{1}{b_l}\#\{s : J(l,s) \cap J(k,t) \neq \emptyset\} = \frac{1}{b_l}\#\{s : J(l,s) \subset J(k,t)\} + O\Big(\frac{1}{b_l}\Big). \tag{10}$$

Analogiškai kaip anksčiau, sąlygą $J(l,s) \subset J(k,t)$ galima perrašyti taip:

$$\frac{tM_k + m_k}{b_k} \leqslant \frac{sM_l + m_l}{b_l} < \frac{sM_l + m_l}{b_l} + \frac{1}{b_l} \leqslant \frac{tM_k + m_k}{b_k} + \frac{1}{b_k}.$$

Iš čia gauname, kad fiksuotam t sąlyga $J(l,s) \subset J(k,t)$ tenkinama nedaugiau kaip $b_l/(M_l b_k) + O(1)$ intervalų. Dabar iš (9) ir (10) gauname, kad

$$\lambda(\mathcal{B}_k \cap \mathcal{B}_l) \leqslant \sum_t{}^{*} \Big(\frac{1}{M_l b_k} + O\Big(\frac{1}{b_l}\Big)\Big) = \Big(\frac{b_k}{M_k} + O(1)\Big)\Big(\frac{1}{M_l b_k} + O\Big(\frac{1}{b_l}\Big)\Big),$$

arba

$$\lambda(\mathcal{B}_k \cap \mathcal{B}_l) \leqslant \frac{1}{M_k M_l} + O\Big(\frac{1}{M_l b_k} + \frac{b_k}{M_k b_l} + \frac{1}{b_l}\Big). \tag{11}$$

Taigi iš (6) ir (11) gauname

$$\begin{aligned} C(n,m) \leqslant\ & \frac{1}{M_n M_m} + O\Big(\frac{1}{M_m b_n} + \frac{b_n}{M_n b_m} + \frac{1}{b_m}\Big) \\ & - \Big(\frac{1}{M_m} + O\Big(\frac{1}{b_m}\Big)\Big)\Big(\frac{1}{M_n} + O\Big(\frac{1}{b_n}\Big)\Big) \\ \ll\ & \frac{1}{M_m b_n} + \frac{b_n}{M_n b_m} + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{b_n M_m} + \frac{1}{M_n b_m} \ll \frac{1}{b_n} + \frac{b_n}{b_m}; \end{aligned} \tag{12}$$

čia pasinaudojome tuo kad, $M_k \ll 1$. Dabar iš (5), (8) ir (12) gauname

$$\varphi_m \ll \sum_{n<m} \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_m} \sum_{n<m} b_n.$$

Kadangi

$$\#\{n \leqslant N : B(n, \alpha) \equiv m_n \pmod{M_n}\} = \sum_{n \leqslant N} f_n(\alpha),$$

tai taikydami lemą, gauname

$$\#\{n \leqslant N : B(n, \alpha) \equiv m_n \pmod{M_n}\}$$
$$= \sum_{n \leqslant N} f_n + O(\Phi(N)^{1/2} (\log \Phi(N))^{3/2+\epsilon}),$$

čia $\epsilon > 0$. Teoremos tvirtinimą gausime pasinaudoję lygybėmis

$$\sum_{n \leqslant N} f_n = \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{M_n} + O\Big(\sum_{n \leqslant N} \frac{1}{b_n}\Big),$$
$$\Phi(N) = \sum_{m \leqslant N} \varphi_m \ll \sum_{m \leqslant N} \Big(\sum_{n<m} \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_m} \sum_{n<m} b_n\Big) = \Psi(N).$$

Lokalinis dėsnis beveik visur

Kokius tikimybinės skaičių teorijos teiginius galima įrodyti straipsnio pradžioje apibrėžtose tikimybinės skaičių teorijos sekose? Tai priklauso nuo pačios sekos b_n. Pateiksime vieną pavyzdį. Tirkime funkciją $f(m) = \Omega(m) - \omega(m)$, kartais vadinamą Rényi funkcija ir susijusius su ja lokaliuosius dažnius

$$\nu_x\{f(a_n) = u\} \quad (a_n = [b_n \alpha]).$$

Ar su $b_n = q^n$ šie dažniai konverguoja į ribinius, kai $x \to \infty$? Deja, atsakyti į šį klausimą nepavyko. Tačiau galima nurodyti greičiau augančios sekos pavyzdį, kai šis teiginys iš tiesų teisingas.

3 teorema. *Jei $q > 1$ ir $b_n = q^{2^n}$, tai su beveik visais $\alpha > 0$ egzistuoja ribos*

$$\nu_x\{f([b_n \alpha]) = u\} \to \nu(u) \quad (x \to \infty). \tag{13}$$

Skaičiai $\nu(u)$ sudaro nepriklausantį nuo α diskretųjį tikimybinį skirstinį.

Pastebėsime, kad (13) sąryšiui svarbi ne sekos b_n narių išraiška, bet jų augimo greitis. Taigi galima suformuluoti šį teiginį bet kokioms pakankamai greitai augančioms sekoms b_n. Kita vertus galima jį suformuluoti ir kitokioms funkcijoms: adityviosioms funkcijoms su sąlyga $f(p) = 0$ (žr. [1]) arba funkcijoms, kurių reikšmės $f(n)$ „retai" priklauso nuo n kanoninio skaidinio bekvadratės dalies, t. y. tokioms funkcijoms teisinga sąlyga

$$\sum \{\frac{1}{n} : f(n) \neq f(\prod_{\substack{p^\alpha || n \\ \alpha > 1}} p^\alpha)\} < \infty.$$

Literatūra

[1] J. Kubilius, *Tikimybiniai metodai skaičių teorijoje*, Vilnius (1962) (rusų k.).

[2] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic Number Theory: mean value theorems*, Springer Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg (1979).

[3] В.Г. Спринджук, *Метрическая теория диофантовых приближений*, Москва (1977).

[4] G. Harman, *Metric Number Theory*, Clarendon Press, Oxford (1998).

The probabilistic number theory and continuum

V. Stakėnas

Let b_n be a sequence of real numbers increasing unboundedly, $\alpha > 0$ and $B(n, \alpha) = [b_n\alpha]$. The conditions on b_n are considered, which imply the regularity of distribution of $B(n, \alpha)$ in arithmetic progressions for almost all $\alpha > 0$. This allows to develop a piece of probabilistic number theory on sequences $B(n, \alpha)$ for almost all $\alpha > 0$.