LMD mokslo darbai, III tomas, 163–166

Dujų dinamikos lygčių vidinis vidurkinimas

Aleksandras KRYLOVAS (VGTU)

Ieškomas viemačio dujų tekėjimo lygčių sistemos specialaus pavidalo sprendinio priklausančio nuo mažo parametro asimptotinis artinys.

1. Užrašykime vienmačio tekėjimo lygčių sistemą Oilerio koordinatėmis:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Čia ρ – dujų tankis, u – greitis, S – entropija, slėgio $P=P(\rho,S)$ žinoma funkcija (dujų būsenos lygtis) tenkina sąlygą

$$\frac{\partial P(\rho,S)}{\partial \rho}>0,\tag{2}$$

kuri garantuoja, kad (1) sistema yra hiperbolinė. Tarkime, kad ε yra mažas teigiamas parametras, ir ieškosime (1) sistemos tokio pavidalo sprendinio:

$$\begin{aligned}
&\rho(t,x)=\rho_0(\varepsilon t,\varepsilon x)+\varepsilon\rho_1(t,x),\ u(t,x)=u_0(\varepsilon t,\varepsilon x)+\varepsilon u_1(t,x),\\
&S(t,x)=S_0(\varepsilon t,\varepsilon x)+\varepsilon S_1(t,x).
\end{aligned}\tag{3}$$

Įveskime „lėtuosius“ kintamuosius $\tau=\varepsilon t, \xi=\varepsilon x$ ir pastebėkime, kad $\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}$. Pareikalaukime, kad funkcijos $\rho_0(\tau,\xi), u_0(\tau,\xi), S_0(\tau,\xi)$, tenkintų (1) sistemą (diferencijuojame pagal τ,ξ). Toks uždavinys srityje $\Omega_0=\left\{(\tau,\xi):0\leqslant\tau+|\xi|\leqslant c_0=\mathrm{const}\right\}$ gali būti sprendžiamas skaitiniais metodais, o funkcijoms ρ_1, u_1, S_1 rasti reikia jau nagrinėti sritį

$$\Omega_\varepsilon=\left\{(t,x):0\leqslant t+|x|\leqslant\frac{c_0}{\varepsilon}\right\}$$

ir jo asimptotinis integravimas nėra trivialus. Tarkime, kad funkcijos $\rho_0(\tau,\xi), u_0(\tau,\xi), S_0(\tau,\xi)$ yra žinomos ir pažymėkime

$$\begin{aligned}
&P_0=P(\rho_0,S_0),\ \rho_1=-\frac{P_{0S}}{P_{0\rho}}v_2+\frac{\rho_0}{\sqrt{P_{0\rho}}}(v_1-v_3),\\
&u_1=v_1+v_3,\ \ S_1=v_2.
\end{aligned}\tag{4}$$

Indeksais S, ρ, τ, ξ, t, x visur žymimos funkcijų dalinės išvestinės.

2. Įstatę (3),(4) reiškinius į (1) sistemą ir atmetę mažesnės, kaip $O(\varepsilon^2)$ eilės narius, gauname sistemą

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \left(a_{ji} + \sum_{k=1}^{3} b_{jik} \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) v_i, \quad j = 1,2,3. \tag{5}$$

Čia $\lambda_1 = u_0 + \sqrt{P_{0\rho}}$, $\lambda_2 = u_0$, $\lambda_3 = u_0 - \sqrt{P_{0\rho}}$.

Surašykime nenulinius (5) sistemos koeficientus:

$$a_{11} = \alpha_0 + \alpha_1, \ a_{31} = \alpha_0 - \alpha_1, \ a_{21} = a_{23} = -S_{0\xi}, \ a_{12} = \beta_0 + \beta_1,$$
$$a_{32} = \beta_0 - \beta_1, \ a_{13} = \gamma_0 + \gamma_1, \ a_{33} = \gamma_0 - \gamma_1,$$
$$b_{111} = -\frac{k_1}{2} - 1, \ b_{112} = \frac{k_{17} - k_{18}}{2}, \ b_{113} = \frac{k_1}{2} - 1, \ b_{121} = -\frac{k_2}{2\sqrt{P_{0\rho}}},$$
$$b_{122} = \frac{m_8 - m_7}{2}, b_{123} = k_{19} + \frac{k_2}{2\sqrt{P_{0\rho}}}, \ b_{131} = \frac{k_1}{2} - 1, \ b_{132} = \frac{k_{18} - k_{17}}{2},$$
$$b_{133} = 1 - \frac{k_1}{2}, \ b_{311} = \frac{k_1}{2} - 1, \ b_{312} = \frac{k_{18} - k_{17}}{2}, \ b_{313} = 1 - \frac{k_1}{2},$$
$$b_{321} = k_{19} + \frac{k_2}{2\sqrt{P_{0\rho}}}, \ b_{322} = \frac{m_7 - m_8}{2}, \ b_{323} = -\frac{k_2}{2\sqrt{P_{0\rho}}}, \ b_{331} = 1 - \frac{k_1}{2},$$
$$b_{332} = \frac{k_{17} - k_{18}}{2}, \ b_{333} = 1 + \frac{k_1}{2}, \ b_{212} = b_{232} = -1.$$

Čia pažymėta

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{P_{0\rho}} \left(-k_6 - \rho_{0\xi} - k_5 - \frac{u_0 k_3}{P_{0\rho}} - k_4 \right)}{2\rho_0},$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(k_7 - u_{0\xi} + k_8 - k_9 - k_{15} - \frac{k_3}{\rho_0} \right),$$
$$\beta_0 = \frac{\sqrt{P_{0\rho}} (k_{13} + k_{12} + k_{11})}{2\rho_0}, \ \beta_1 = \frac{1}{2} \left(k_{14} - k_{16} - k_{20} - \frac{S_{0\xi} k_{10} + P_{0S} k_2}{2\rho_0} \right),$$
$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{P_{0\rho}} \left(-k_6 - \rho_{0\xi} + k_5 - \frac{u_0 k_3}{P_{0\rho}} - k_4 \right)}{2\rho_0},$$
$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(k_9 + k_{15} - k_8 - k_7 - u_{0\xi} - \frac{k_3}{\rho_0} \right),$$
$$k_1 = \frac{P_{0\rho\rho} \rho_0}{P_{0\rho}}, \ k_2 = P_{0\rho S} - \frac{P_{0\rho\rho} P_{0S}}{P_{0\rho}}, \ k_3 = \rho_{0\xi} \sqrt{P_{0\rho}} - \frac{\rho_0 P_{0\rho\xi}}{2\sqrt{P_{0\rho}}},$$
$$k_4 = \frac{P_{0S} S_{0\xi}}{P_{0\rho}}, \ k_5 = \frac{u_{0\xi} \rho_0}{\sqrt{P_{0\rho}}}, \ k_6 = \frac{1}{P_{0\rho}} \left(\rho_{0\tau} \sqrt{P_{0\rho}} - \frac{\rho_0 P_{0\rho\tau}}{\sqrt{P_{0\rho}}} \right),$$

$$k_7 = \frac{\rho_{0\xi}\sqrt{P_{0\rho}}}{\rho_0},\; k_8 = \frac{P_{0S}S_{0\xi}}{\rho_0\sqrt{P_{0\rho}}},\; k_9 = \frac{S_{0\xi}P_{0\rho S}}{\sqrt{P_{0\rho}}},\; k_{10} = P_{0SS} - \frac{P_{0\rho S}P_{0S}}{P_{0\rho}},$$
$$k_{11} = \frac{u_0\left(P_{0S\xi}P_{0\rho} - P_{0S}P_{0\rho\xi}\right)}{P_{0\rho}^2},\; k_{12} = \frac{u_{0\xi}P_{0S}}{P_{0\rho}}, k_{13} = \frac{P_{0S\tau}P_{0\rho} - P_{0S}P_{0\rho\tau}}{P_{0\rho}^2},$$
$$k_{14} = \frac{P_{0S\xi}P_{0\rho} - P_{0S}P_{0\rho\xi}}{P_{0\rho}\rho_0},\; k_{15} = \frac{\rho_{0\xi}P_{0\rho\rho}}{\sqrt{P_{0\rho}}},\; k_{16} = \frac{P_{0S}\rho_{0\xi}}{\rho_0^2},$$
$$k_{17} = \frac{P_{0\rho\rho}P_{0S}}{P_{0\rho}^{3/2}},\; k_{18} = \frac{P_{0\rho S}}{\sqrt{P_{0\rho}}},\; k_{19} = \frac{P_{0S}}{\rho_0\sqrt{P_{0\rho}}},\; k_{20} = \frac{P_{0S}^2S_{0\xi}}{P_{0\rho}\rho_0^2}.$$

3. Sistemai (5) galime taikyti specifinį asimptotinio integravimo metodą, kurį autorius pavadino vidiniu vidurkinimu (žr.[1], kur yra literatūros apžvalga; taip pat žr. [2]).

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau} + \lambda_j\frac{\partial V_j}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{3} a_{ji}\langle V_i\rangle_j + \sum_{k=1}^{3} b_{jik}\left\langle \frac{\partial V_k}{\partial x}V_i\right\rangle_j, \quad j = 1,2,3. \tag{6}$$

Čia $\langle\varphi(\tau,\xi,y_1,y_2,y_3)\rangle_j = \psi(\tau,\xi,y_j)$ pažymėtas funkcijos φ vidurkis išilgai (5) sistemos j–osios charakteristikos, „greitieji" charakteristiniai kintamieji $y_j = \frac{1}{\varepsilon}\xi_j(0;\tau,\xi)$, funkcijos $\xi_j(s;\tau,\xi)$ tenkina paprastasias diferencialines lygtis:

$$\frac{d\xi_j}{ds} = \lambda_j(s,\xi_j), \xi_j(\tau;\tau,\xi) = \xi \quad j = 1,2,3. \tag{7}$$

Tada srityje Ω_ε turime

$$v_j(t,x) = V_j(\tau,\xi,y_j) + o(1), \quad j = 1,2,3, \quad \varepsilon \to 0. \tag{8}$$

Pastebėję, kad $\langle v_j\rangle_j \equiv v_j$ galime užrašyti (6) sistemos atskirą atvejį, kai jos lygtys yra nepriklausomos. Tarkime, kad (6) sistemos sprendinys tenkina pradinę sąlygą

$$V(0,\xi,y_j) = V_j^0(\xi,y_j), \quad j = 1,2,3 \tag{9}$$

ir funkcijos $V_j^0(\xi,y_j)$ yra nykstančiosios kai $y_j \to \pm\infty$:

$$\lim_{y_j\to\pm\infty} V_j^0(\xi,y_j) = \overline{V^0}(\xi), \quad j = 1,2,3 \tag{10}$$

tolygiai pagal $\xi \in [-c_0,c_0]$.

Tada funkcijos tenkina atskiras lygtis

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V_j}{\partial \tau} + \lambda_j\frac{\partial V_j}{\partial \xi} = a_{jj}V_j + b_{jjj}V_j\frac{\partial V_j}{\partial y_j}, \quad j = 1,3, \\ &\frac{\partial V_2}{\partial \tau} + u_0\frac{\partial V_2}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

su (9) pradinėmis sąlygomis.

Taigi suformuluokime gautus rezultatus.

Teorema. *Tarkime, kad funkcija $P(\rho, S)$ yra du kartus tolydžiai diferencijuojama taško (ρ_0, S_0) aplinkoje ir tenkina (2) sąlygą. Tada egzistuoja tokia teigiama konstanta c_0, kad srityje*

$$\Omega_\varepsilon = \left\{(t, x) : 0 \leqslant t + |x| \leqslant \frac{c_0}{\varepsilon}\right\}$$

(1) sistema turi tokio pavidalo sprendinius:

$$\begin{aligned}
\rho(t, x) &= \rho_0(\varepsilon t, \varepsilon x) \\
&\quad + \varepsilon\left(-\frac{P_{0S}(\rho_0(\varepsilon t, \varepsilon x), S_0(\varepsilon t, \varepsilon x))}{P_{0\rho}(\rho_0(\varepsilon t, \varepsilon x), S_0(\varepsilon t, \varepsilon x))} V_2\left(\varepsilon t, \varepsilon x, \frac{1}{\varepsilon}\xi_2(0; \varepsilon t, \varepsilon x)\right)\right. \\
&\quad + \frac{\rho_0(\varepsilon t, \varepsilon x)}{\sqrt{P_{0\rho}(\rho_0(\varepsilon t, \varepsilon x), S_0(\varepsilon t, \varepsilon x))}}\left(V_1\left(\varepsilon t, \varepsilon x, \frac{1}{\varepsilon}\xi_1(0; \varepsilon t, \varepsilon x)\right)\right. \\
&\quad \left.\left. - V_3\left(\varepsilon t, \varepsilon x, \frac{1}{\varepsilon}\xi_3(0; \varepsilon t, \varepsilon x)\right)\right) + o(1)\right), \\
u(t, x) &= u_0(\varepsilon t, \varepsilon x) + \varepsilon\left(V_1\left(\varepsilon t, \varepsilon x, \frac{1}{\varepsilon}\xi_1(0; \varepsilon t, \varepsilon x)\right) + V_3\left(\varepsilon t, \varepsilon x, \frac{1}{\varepsilon}\xi_3(0; \varepsilon t, \varepsilon x)\right) + o(1)\right) \\
S(t, x) &= S_0(\varepsilon t, \varepsilon x) + \varepsilon\left(V_2\left(\varepsilon t, \varepsilon x, \frac{1}{\varepsilon}\xi_2(0; \varepsilon t, \varepsilon x)\right) + o(1)\right).
\end{aligned}$$

Funkcijos V_j tenkina (11) lygtis, o funkcijos $\xi_j(s; \varepsilon t, \varepsilon x)$ yra (7) paprastųjų diferencialinių lygčių sprendiniai.

Pastaba. Atskiru atveju, kai ρ_0, u_0, S_0 yra konstantos (pastebėkime, kad tada visi koeficientai $a_{ji} = 0$) ir „greitieji" charakteristiniai kintamieji $y_j = x - \lambda_j t$. Tada funkcijos $V_1(\tau, \xi, x - (u_0 + \sqrt{P_{0\rho}})t)$, $V_2(\tau, \xi, x - u_0 t)$, $V_3(\tau, \xi, x - (u_0 - \sqrt{P_{0\rho}})t)$ aprašo paprastasias bėgančias bangas. Taigi šis klasikinis rezultatas apibendrintas atvejui, kai garso greitis $\sqrt{P_{0\rho}(\rho_0(\varepsilon t, \varepsilon x), S_0(\varepsilon t, \varepsilon x))}$ nėra konstanta.

Literatūra

[1] A. Krylovas, Kvazitiesinių hiperbolinių sistemų asimptotika, *LMD mokslo darbai*, II (1998).

[2] A. Krylovas, Suvidurkintų sprendinių klasės konstravimas, *Matematinis modeliavimas ir kompleksinė analizė*, Straipsnių rinkinys, Vilnius, Technika (1996).

Internal averaging of gas dinamic equations

A. Krylovas

An asymptotical approximation of a solution of a system of equations which describe one dimensional gas flow depending on a small parameter is obtained.