LMD mokslo darbai, III tomas, 294–298

Uždavinių sprendimas remiantis funkcijų savybėmis

Juozas ŠINKŪNAS, Algimantas Pranas URBONAS (VPU)
el. paštas: sinkunas@vpu.lt, urbonas@vpu.lt

Vidurinės mokyklos matematikos kurse nagrinėjamų funkcijų savybės mažai panaudojamos sprendžiant uždavinius.

Šiame straipsnelyje pavyzdžiais parodoma kaip, panaudojant funkcijos apibrėžimo sritį, lyginumą, monotoniškumą, aprėžtumą, iškilumą ir kitas savybes, netaikant diferencialinio skaičiavimo metodų, galima supaprastinti daugelio uždavinių sprendimą.

1. Nagrinėjant tiesioginio proporcingumo funkciją $f(x) = kx$, reikėtų atkreipti dėmesį į šitokią jos savybę: jeigu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – argumento reikšmės, o $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \ldots, y_n = f(x_n)$ – jas atitinkančios funkcijos reikšmės, tai

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n} = k$$

ir iš jų išplaukiančios proporcijos –

$$\frac{y_1 + x_1}{x_1} = \frac{y_2 + x_2}{x_2}, \quad \frac{y_1 - x_1}{x_1} = \frac{y_2 - x_2}{x_2}, \quad \frac{y_1 + x_1}{y_1 - x_1} = \frac{y_2 + x_2}{y_2 - x_2}, \ldots.$$

1 pavyzdys. Per trikampio ABC kraštinės AB bet kurį tašką D išvesta tiesė, lygiagreti kraštinei AC, kerta kraštinę BC taške F, o per tašką D išvesta tiesė, lygiagreti kraštinei BC, kerta kraštinę AC taške G. Įrodysime, kad apskritimų, apibrėžtų apie trikampius ADG ir BDF, spindulių suma lygi apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spinduliui.

Sprendimas. Sakykime, kad apie trikampius ADG, BDF ir ABC apibrėžtų apskritimų spinduliai atitinkamai lygūs R_1, R_2, ir R. Kadangi minėti trikampiai yra panašūs, tai apie juos apibrėžtų apskritimų spinduliai proporcingi atitinkamoms kraštinėms, t.y.

$$\frac{R_1}{AD} = \frac{R_2}{DB} = \frac{R}{AB}.$$

Iš čia:

$$\frac{R_1 + R_2}{AD + DB} = \frac{R}{AB}, \quad \text{t.y.} \ \frac{R_1 + R_2}{AB} = \frac{R}{AB}.$$

Taigi $R_1 + R_2 = R$.

2. Sprendžiant uždavinius, susijusius su kvadratiniu trinariu $f(x) = ax^2 + bx + c$, dažnai naudinga remtis šitokiomis akivaizdžiomis savybėmis:

1) Kvadratinio trinario šaknys yra realios ir skaičius α yra tarp šaknų tik tada, kai $a \cdot f(\alpha) < 0$, t.y.

$$a \cdot \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) < 0;$$

2) Du realieji skaičiai r ir s ($r < s$) ir kvadratinio trinario šaknys išsidėstę šitaip:

a) $x_1 < r < x_2 < s$ tik tada, kai

$$\begin{cases} a \cdot f(r) < 0, \\ a \cdot f(s) > 0. \end{cases}$$

b) $r < x_1 \leqslant x_2 < s$ tik tada, kai

$$\begin{cases} af(r) > 0, \\ af(s) > 0, \\ r < -\frac{b}{2a} < s, \\ D = b^2 - 4ac \geqslant 0. \end{cases}$$

c) $x_1 \leqslant x_2 < r < s$ tik tada, kai

$$\begin{cases} af(r) > 0, \\ -\frac{b}{2a} < r, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$$

Analogiškai nusakomos sąlygos su kuriomis teisingos nelygybės: d) $r < x_1 < s < x_2$, e) $r < s < x_1 \leqslant x_2$, f) $x_1 < r < s < x_2$.

2 pavyzdys. Ištirsime su kuriomis k reikšmėmis nelygybės $kx^2 + (1 - k^2)x - k > 0$ sprendiniai absoliutiniu didumu ne didesni už 2.

Sprendimas. Kadangi kvadratinio trinario $f(x) = kx^2 + (1 - k^2)x - k$ diskriminantas teigiamas, tai nelygybės $kx^2 + (1 - k^2)x - k > 0$ sprendiniai bus tarp skaičių -2 ir 2 tik tuomet, kai:

$$\begin{cases} k < 0, \\ k \cdot f(-2) \geqslant 0, \\ k \cdot f(2) \geqslant 0, \\ -2 < -\frac{1 - k^2}{2k} < 2. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, gauname: $k \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Pastaba. Pavyzdžiui, tiriant kvadratinės lygties $kx^2 - 3(k + 1)x + 2k + 7 = 0$ šaknų padėtį skaičių -1 ir 4 atžvilgiu, reikia nagrinėti aukščiau išvardytus 6 atvejus.

3. Sprendžiant iracionaliąsias ir logaritmines lygtis kartais reikia tirti įeinančių į lygtį funkcijų apibrėžimo sritį, o kartais paprasčiau tą lygtį išspręsti ir patikrinti atsakymus.

3 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$\sqrt{6+5x-x^2}+\sqrt{2-x}=x-2.$$

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis yra nelygybių sistemos

$$\begin{cases} 6+5x-x^2 \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0 \end{cases}$$

sprendinių aibė. Ši sistema turi vienintelį sprendinį $x = 2$, kuris yra ir duotosios lygties sprendinys. Taigi lygtis turi vienintelį sprendinį $x = 2$.

4 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}.$$

Sprendimas. Šiuo atveju geriau nekreipti dėmesio į apibrėžimo sritį, o, lygtį du kartus pakėlus kvadratu, rasti du sprendinius: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{6}{5}$.

Patikrinus, įsitikinama, kad tik $x = 3$ yra duotosios lygties sprendinys.

4. Sprendžiant lygtis ar nelygybes, tenka remtis į jas įeinančių funkcijų monotoniškumu.

Akivaizdžios savybės:

a) Jeigu funkcija monotoniškai didėjanti (mažėjanti), tai lygtis $f(x) = a$ turi ne daugiau vieno sprendinio;

b) Jeigu funkcija $f(x)$ yra monotoniškai didėjanti (mažėjanti), o funkcija $g(x)$ – monotoniškai mažėjanti (didėjanti), tai lygtis $f(x) = g(x)$ turi ne daugiau vieno sprendinio.

5 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x+2}=\frac{4}{x}+1.$$

Sprendimas. Kai $x \geqslant 1$, funkcijos $\sqrt[5]{x-1}$ ir $\sqrt{x+2}$ yra didėjančios, tai jų suma taip pat didėjanti funkcija, o funkcija $\frac{4}{x}+1$ – mažėjanti. Taigi nagrinėjama lygtis gali turėti ne daugiau vieno sprendinio. Akivaizdu, kad tas sprendinys yra $x = 2$.

5. Pasinaudojus į lygtį įeinančių funkcijų lyginumu ar jų didžiausiomis ir mažiausiomis reikšmėmis, kartais pavyksta supaprastinti uždavinio sprendimą.

6 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$x^4-2x^2+2=1-\sqrt{x^3-x^2}.$$

Sprendimas. Tradiciškai išspręsti šią lygtį gana sunku. Pastebėsime, kad funkcijos $f(x) = x^4 - 2x^2+2 = (x^2-1)^2+1$ mažiausia reikšmė lygi 1, t.y. $f(x) \geqslant 1$, o funkcijos $g(x) = 1-\sqrt{x^3 - x^2}$ didžiausia reikšmė lygi 1, t.y. $g(x) \leqslant 1$. Vadinasi, $f(x) = g(x)$ tik tuomet, kai $f(x) = 1$ ir $g(x) = 1$, t.y. kai $x = 1$.

7 pavyzdys. Ištirsime su kuriomis a reikšmėmis lygtis $x^2 - 4|x| + 2 = a$ turi 3 sprendinius.

Sprendimas. Jeigu $x_0 \neq 0$ yra šios lygties sprendinys, tai $-x_0$ taip pat yra šios lygties sprendinys. Kad lygtis turėtų tik 3 sprendinius, vienas sprendinys turi būti 0. 0 yra lygties sprendinys, kai $a = 2$. Dabar jau nesunku rasti ir kitus du sprendinius: -4 ir 4.

Vadinasi, kai $a = 2$, lygtis $x^2 - 4|x| + 2 = a$ turi 3 sprendinius: 0, -4, ir 4.

6. Funkcija $f(x)$ vadinama iškila (įgaubta) intervale, jeigu bet kuriems šio intervalo taškams x_1 ir x_2 teisinga nelygybė

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Iškilos funkcijos grafikas yra virš stygos, jungiančios grafiko taškus $(x_1, f(x_1))$ ir $(x_2, f(x_2))$, o įgaubtos funkcijos grafikas yra tuos taškus jungiančios stygos apačioje. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \sin x$ intervale $[-\pi; 0]$ yra įgaubta, o intervale $[\pi; 0]$ – iškila. Funkcija $f(x) = x^2$ yra įgaubta visoje apibrėžimo srityje. Funkcijų iškilumo ir įgaubtumo savybės plačiai taikomos įrodinėjant nelygybes.

8 pavyzdys. Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Trikampio vidaus kampų A, B ir C pusiaukampinės kerta apskritimą taškuose A_1, B_1 ir C_1. Įrodysime, kad trikampio ABC perimetras ne didesnis už trikampio $A_1B_1C_1$ perimetrą, t.y. $P_{ABC} \leqslant P_{A_1B_1C_1}$.

Sprendimas. Sakykime apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys R. Remdamiesi sinusų teorema gauname:

$$P_{ABC} = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \quad \text{ir}$$
$$P_{A_1B_1C_1} = 2R(\sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1).$$

Taigi reikia įrodyti, kad

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1.$$

Kadangi $\angle A_1 = \frac{\angle B+\angle C}{2}$, $\angle B_1 = \frac{\angle A+\angle C}{2}$, $\angle C = \frac{\angle A+\angle B}{2}$, tai reikia įrodyti, kad $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{A+C}{2} + \sin\frac{A+B}{2}$.

Funkcija $f(x) = \sin x$ intervale $[0; \pi]$ yra iškila, todėl

$$\sin A + \sin B \leqslant 2\sin\frac{A+B}{2},$$
$$\sin B + \sin C \leqslant 2\sin\frac{B+C}{2},$$
$$\sin A + \sin C \leqslant 2\sin\frac{A+C}{2}.$$

Sudėję panariui šias nelygybes, gauname reikiamą nelygybę. Pastebėsime, kad lygybė galima tik tuomet, kai trikampis ABC yra lygiakraštis.

9 pavyzdys. Įrodysime, kad $\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \leqslant \frac{x^4+y^4}{2}$, kai $x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

Sprendimas. Nagrinėsime funkciją $f(x) = x^4$. Jos grafikas intervale $[0; +\infty)$ yra įgaubtas, todėl bet kuriems $x \geqslant 0$ ir $y \geqslant 0$, teisinga nelygybė $\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \leqslant \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} = \frac{x^4+y^4}{2}$.

Literatūra

[1] Z. Lupeikis, J. Šinkūnas, A. Urbonas, *Matematinė analizė*, I, VPU leidykla (1998).

[2] В.В. Вавилов, И.И. Мельников и др., *Задачи по математике, Начала анализа*, Наука (1990).

[3] М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.Л. Нестеренко, *Конкурсные задачи по математике*, А.О. Столетие (1995).

[4] И.И. Мельников, И.Н. Сергеев, *Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах*, Из-во Московского ун-та (1990).

[5] В.В. Амелькин, В.Л. Рабцевич, *Задачи с параметрами*, Ассар, Минск (1996).

Solutions des exercices s'appuiant sur les propriétés des fonctions

J. Šinkūnas, A.P. Urbonas

Dans cet article on étudie la posibilité de simplifier des solutions des exercices on sáppuiant surles propriétés des fonctions (domaine de définition, pairité, convexité, variation etc.).