LMD mokslo darbai, III tomas, 348–352

Automatinio valdymo sistemos matematinio modelio tyrimas

Jonas RIMAS (KTU)
el. paštas: jonas.rimas@fmf.ktu.lt

Nagrinėsime lygtį:

$$Dx(t) = B_0x(t) + B_1(t-\tau) + z(t); \tag{1}$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius (taikomas apibendrintoms funkcijoms), $B_0 = -\varkappa E$, E – vienetinė septintosios eilės matrica, $\varkappa$ – koeficientas, $B_1 = \frac{\varkappa}{2}B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$x(t)$ – ieškoma vektorinė funkcija, τ – pastovus vėlinimas, $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(1) lygtis yra ryšio tinklo tarpusavio sinchronizacijos sistemos, sudarytos iš 7-nių sujungtų į žiedą generatorių, matematinis modelis. Jos sprendinys gali būti užrašytas taip [1]:

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} \left(A^{-1}B_1e^{-p\tau}\right)^l A^{-1}Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau,$$

čia $A = pE - B_0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{p+\varkappa}E$, $Z(p) \div z(t)$.

Panaudoję (2) pažymėjimą, turime

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{l} \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^l \frac{1}{(p+\varkappa)^{l+1}} e^{-pl\tau} B^l Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau. \tag{3}$$

Iš (3) išplaukia

$$h(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{l} \frac{1}{(p+\varkappa)^{l+1}} e^{-pl\tau} B^{l}, \quad 0 < t < (L+1)\tau; \tag{4}$$

čia $h(t)$ – sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica, $h_{ij}(t)$ $(i,j=\overline{1,6})$ – i-tojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į j-tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį.

Rasime pereinamųjų funkcijų išraiškas. Tuo tikslu apskaičiuosime matricos B l-tąjį laipsnį. Skaičiavimus atliksime pasinaudoję formule

$$B^{l} = TJ^{l}T^{-1}; \tag{5}$$

čia J – matricos B Žordano forma. Matricas J ir T rasime, jei žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{6}$$

Pažymėkime

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & & & & 1 \\ 1 & a & 1 & & & \\ & 1 & a & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & a & 1 \\ 1 & & & & 1 & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & & & & \\ 1 & a & 1 & & 0 & \\ & 1 & a & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & a & 1 \\ & & & & 1 & a \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Tada

$$|B - \lambda E| = D_7(-\lambda). \tag{8}$$

Iš (7) išplaukia

$$D_n(a) = a\Delta_{n-1}(a) - 2\Delta_{n-2}(a) - 2(-1)^{n} \tag{9}$$

ir

$$\Delta_n(a) = a\Delta_{n-1}(a) - \Delta_{n-2}(a) \quad (\Delta_2(a) = a^2 - 1,\ \Delta_1(a) = a). \tag{10}$$

Išsprendę (10) skirtuminę lygtį, randame $\Delta_n(a) = U_n\left(\frac{a}{2}\right)$,

$$D_n(a) = U_n\left(\frac{a}{2}\right) - U_{n-2}\left(\frac{a}{2}\right) - 2(-1)^{n}; \tag{11}$$

čia $U_n(x)$ yra n-tojo laipsnio antrojo tipo Čebyševo daugianaris.

Pasinaudoję lygybe $T_n(x) = \frac{1}{2}\Big[U_n(x) - U_{n-2}(x)\Big]$ [3], turime

$$D_n(a) = 2\Big[T_n\Big(\frac{a}{2}\Big) - (-1)^n\Big]; \tag{12}$$

čia $T_n(x)$ yra n-tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris.

Visi daugianario $T_n(x)$ nuliai yra intervale [-1,1] ir gali būti surasti naudojantis formule

$$x_{nk} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Tai išplaukia iš žinomos lygybės

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{14}$$

Remdamiesi (8), (12) ir (13) išraiškomis, užrašome (6) charakteristinės lygties šaknis (matricos B tikrines reikšmes) [3]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2\cos\frac{\pi}{7}\ (l_1 = 2), \quad \lambda_3 = -2\cos\frac{3\pi}{7}\ (l_3 = 2), \\ \lambda_5 &= 2\cos\frac{2\pi}{7}\ (l_5 = 2), \quad \lambda_7 = 2\ (l_7 = 1); \end{aligned}$$

čia l_i yra tikrinės reikšmės λ_i kartotinumas.

Paprastajai tikrinei reikšmei λ_7 matricoje J atitiks viena Žordano ląstelė $J_1(\lambda_7)$. Kartotinei tikrinei reikšmei λ_i $(i = 1, 3, 5)$ matricoje J atitiks dvi Žordano ląstelės $J_1(\lambda_i)$, nes rangas $r(B - \lambda_i E) = 5$ ir $n - r(B - \lambda_i E) = 2$, $i = 1, 3, 5$ (čia n – matricos B eilė) [2]. Įvertinę tai užrašome matricos B Žordano formą:

$$J = \begin{pmatrix} -a & & & & & & \\ & -a & & & 0 & & \\ & & -b & & & & \\ & & & -b & & & \\ & & & & c & & \\ & 0 & & & & c & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix};$$

čia pažymėta

$$a = 2\cos\frac{\pi}{7}, \quad b = 2\cos\frac{3\pi}{7}, \quad c = 2\cos\frac{2\pi}{7}. \tag{15}$$

Remdamiesi lygybe $J = T^{-1}BT$, randame

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -a & -1 & -b & -1 & c & 1 \\ a & ac & b & -ab & -c & cb & 1 \\ -ac & -ac & ab & ab & -cb & -cb & 1 \\ ac & a & -ab & b & cb & -c & 1 \\ -a & -1 & -b & -1 & c & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} c & -b & -b & c & -a & 2 & -a \\ -a & c & -b & -b & c & -a & 2 \\ -a & c & c & -a & -b & 2 & -b \\ -b & -a & c & c & -a & -b & 2 \\ -b & -a & -a & -b & c & 2 & c \\ c & -b & -a & -a & -b & c & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Randame matricos B l-tąjį laipsnį ($l = 1, 2, 3, \ldots$).

$$B^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

čia

$$\begin{aligned} a_1(l) &= 2(-a)^l + 2(-b)^l + 2c^l + 2^l, \\ a_2(l) &= (-a)^l(-a) + (-b)^l(-b) + c^lc + 2^l, \\ a_3(l) &= (-a)^lc + (-b)^l(-a) + c^l(-b) + 2^l, \\ a_4(l) &= (-a)^l(-b) + (-b)^lc + c^l(-a) + 2^l. \end{aligned} \tag{17}$$

Įstatę (16) į (4) ir atlikę reikiamus pertvarkymus, randame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_4 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & h_4 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix};$$

čia

$$h_1(t) = e^{-\varkappa t}(t) + g_1(t), \quad h_i(t) = g_i(t), \; i = 2,3,4,$$
$$g_i(t) = \frac{1}{7}\sum_{l=1}^{L} a_i(l)\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^l \frac{(t-l\tau)^l}{l!} e^{-\varkappa(t-l\tau)} 1(t-l\tau),$$
$$i = \overline{1,4}, \quad 0 < t < (L+1)\tau;$$

$1(t)$ – vienetinė funkcija, $a_i(l)$ $(i = \overline{1,4})$ – žr. (17) išraišką.

Gautos tikslios analizinės pereinamųjų funkcijų išraiškos gali būti panaudotos sistemos dinamikai tirti, jos statistinėms charakteristikoms skaičiuoti, perdavimo funkcijoms ir dažninėms charakteristikoms rasti.

Literatūra

[1] J.Z. Rimas, Issledovanija dinamiki sistem vzaimnoj sinchronizacii, *Radiotechnika*, T32, **2**, 3–9 (1977).
[2] R. Horn, Ch. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge university press (1986).
[3] S. Paškovskij, *Vyčislitelnyje primenenija mnogočlenov i riadov Čebyševa*, Maskva (1983).

Investigation of the mathematical model of the automatic control system

J. Rimas

The mathematical model of the mutual synchronisation system composed of 7 joined into a ring oscillators is investigated. The precise analytical expressions of the elements of the step responses matrix of the system are obtained.