LMD konf. darbai, 104–109
1997, Vilnius

Pseudolinearinis sąryšis atraminių pseudolinearų erdvėje

J. Šinkūnas (VPU)

Autoriaus straipsnyje [2] išdėstyta atraminių linearų erdvės su afininiu sąryšiu kovariantinio diferencijavimo ir kreivumo teorija. Šiame straipsnelyje nagrinėjama atraminių pseudolinearų erdvė su bendruoju pseudolineariniu sąryšiu ir natūraliai apibendrinami [2] ir [3] rezultatai.

1. PAGRINDINĖS SĄVOKOS

Nagrinėsime n-matę diferencijuojamą daugdarą X_n, kurios lokaliosios koordinatės x^α yra pilnai integruojamos diferencialinių lygčių sistemos

$$\omega^\alpha = 0 \tag{1.1}$$

pirmieji integralai; čia $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$ – tiesiškai nepriklausomos Pfaffo formos, turinčios tokią struktūrą:

$$\begin{aligned}
&d\omega^\alpha = \omega^\gamma \wedge \omega^\alpha_\gamma,\\
&d\omega^\alpha_\gamma = \omega^\varepsilon_\gamma \wedge \omega^\alpha_\varepsilon + \omega^\varepsilon \wedge \omega^\alpha_{\gamma\varepsilon},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^\alpha_{\beta_1\dots\beta_a} = \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{a!}{s!(a-s)!}\omega^\varepsilon_{(\beta_1\dots\beta_s)} \wedge \omega^\alpha_{(\beta_{s+1}\dots\beta_a} \wedge \omega^\alpha_{\beta_{s+1}\dots\beta_a)\varepsilon} + \omega^\varepsilon \wedge \omega^\alpha_{\beta_1\dots\beta_a\varepsilon}\\
&(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n;\ a, b, c = 1, 2, \dots, p).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Su kiekvienu daugdaros X_n tašku asocijuojasi p-tos eilės liečiamoji erdvė $T_{np}(x)$, kurios fundamentalioji grupė yra diferencialinė grupė $D^{(p,n)}(\dim D^{(p,n)} = n[C^n_{p+n} - 1])$. Jos invariantinės formos yra:

$$\gamma^\alpha_{\beta_1\dots\beta_a} = \omega^\alpha_{\beta_1\dots\beta_a}\big|_{\omega^\alpha=0}. \tag{1.3}$$

Kai $p = 1$, γ^α_β yra liečiamosios erdvės $T_n(x)$ centroafininės grupės invariantinės formos.

Pagal G.Laptevo teoremą apie tiesinius objektus [1], šios grupės įvaizdį N-matėje erdvėje galime užrašyti taip:

$$\Delta y^A = dy^A + h^{A\alpha}_{B\varepsilon}\gamma^\varepsilon_\alpha y^B = 0, \tag{1.4}$$

kur $h^{A\alpha}_{B\varepsilon}$ – konstantos, susietos pereinamybėmis

$$h^{A\alpha}_{B\beta}\delta^{\varepsilon}_{\gamma} + h^{A\alpha}_{C\gamma}h^{C\varepsilon}_{B\beta} = h^{A\varepsilon}_{B\gamma}\delta^{\alpha}_{\beta} + h^{A\varepsilon}_{C\beta}h^{C\alpha}_{B\gamma} \qquad (A, B, C = 1, 2, 3, \ldots, N). \tag{1.5}$$

Sakysime, kad daugdaroje X_n apibrėžtas pseudolinearinio objekto $V^{A\alpha}$ laukas, jeigu jo diferencialinės lygtys yra:

$$dV^{A\alpha} + V^{A\gamma}\omega^{\alpha}_{\gamma} + V^{B\alpha}\Theta^{A}_{B} = V^{A\alpha}_{\gamma}\omega^{\gamma}, \tag{1.6}$$

kur

$$\Theta^{A}_{B} = h^{A\gamma}_{B\varepsilon}\omega^{\varepsilon}_{\gamma}. \tag{1.7}$$

Kai $h^{A\gamma}_{B\varepsilon} = \delta^{\gamma}_{\varepsilon}C^{A}_{B}$, $C^{A}_{B} \in R$, gaunamas linearo $V^{A\alpha}$ laukas [2].

2. ATRAMINIŲ PSEUDOLINEARŲ ERDVĖ

Diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} \omega^{\alpha} = 0, \\ \Theta^{A\alpha} = dV^{A\alpha} + V^{B\gamma}\omega^{A\alpha}_{B\gamma} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\left(\omega^{A\alpha}_{B\gamma} = \delta^{A}_{B}\omega^{\alpha}_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\Theta^{A}_{B}\right)$$

yra pilnai integruojama ir jos pirmieji integralai yra atraminių pseudolinearų erdvės $P_{n,v}$ lokaliosios koordinatės. Šios erdvės struktūros lygtys yra:

$$\begin{aligned} D\omega^{\alpha} &= \omega^{\gamma} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma}, \\ D\Theta^{A\alpha} &= \Theta^{B\gamma} \wedge \omega^{A\alpha}_{B\gamma} + \omega^{\gamma} \wedge \Theta^{A\alpha}_{\gamma}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kur

$$\Theta^{A\alpha}_{\gamma} = V^{B\varepsilon}\omega^{A\alpha}_{B\gamma\varepsilon}.$$

Keičiant atraminio elemento $V^{A\alpha}$ normavimą

$$\bar{V}^{A\alpha} = \lambda V^{A\alpha} \tag{2.3}$$

(čia λ – skaliaras), formos $\Theta^{A\alpha}$ keičiasi taip:

$$\bar{\Theta}^{A\alpha} = \lambda\Theta^{A\alpha} + V^{A\alpha}d\lambda. \tag{2.4}$$

Erdvės $P_{n,v}$ liečiamoji erdvė $T_{n+Nn}(x, v)$ izomorfinė operatorių $X_{\alpha} = \partial/\partial x^{\alpha}$, $X_{A\alpha} = \partial/\partial v^{A\alpha}$ erdvei. Jos dualiosios erdvės $T^{*}_{n+Nn}(x, v)$ koreperis yra $(dx^{\alpha}, dv^{A\alpha})$.

Formomis

$$\bar{\Theta}^{A\alpha} = \Theta^{A\alpha} + \Gamma^{A\alpha}_{\gamma}\omega^{\gamma} \tag{2.5}$$

apibrėžiamas erdvės $P_{n,v}$ tiesinis sąryšis, jeigu dydžiai $\Gamma_{\gamma}^{A\alpha}$ tenkina diferencialinių lygčių sistemą:

$$\Delta\Gamma_{\gamma}^{A\alpha} - \Theta_{\gamma}^{A\alpha} = \Gamma_{\gamma,\varepsilon}^{A\alpha}\omega^{\varepsilon} + \Gamma_{B\gamma\varepsilon}^{A\alpha}\Theta^{B\varepsilon}, \tag{2.6}$$

kur

$$\Delta\Gamma_{\gamma}^{A\alpha} = d\Gamma_{\gamma}^{A\alpha} - \Gamma_{\varepsilon}^{A\alpha}\omega_{\gamma}^{\varepsilon} + \Gamma_{\gamma}^{B\varepsilon}\omega_{B\varepsilon}^{A\alpha}; \tag{2.7}$$

be to,

$$\Gamma_{\gamma}^{A\alpha}(x,\lambda,v) = \lambda\Gamma_{\gamma}^{A\alpha}(x,v), \qquad \Gamma_{\gamma,\varepsilon}^{A\alpha}(x,\lambda v) = \lambda\Gamma_{\gamma,\varepsilon}^{A\alpha}(x,v), \qquad \Gamma_{B\gamma\varepsilon}^{A\alpha}(x,\lambda v) = \Gamma_{B\gamma\varepsilon}^{A\alpha}(x.$$

Pratęsus (2.6) sistemą, gauname:

$$\Delta\Gamma_{\gamma,\beta}^{A\alpha} - \Gamma_{\varepsilon}^{A\alpha}\omega_{\gamma\beta}^{\varepsilon} + \Gamma_{\gamma}^{B\vee}\omega_{B\beta\varepsilon}^{A\alpha} - \Gamma_{B\beta\varepsilon}^{A\alpha}\Theta_{\beta}^{B\varepsilon} - \Theta_{\gamma,\beta}^{A\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta\varepsilon}^{A\alpha}\omega^{\varepsilon} + \Gamma_{B\gamma\beta\varepsilon}^{A\alpha}\Theta^{B\varepsilon}, \tag{2.8}$$

$$\Delta\Gamma_{B\gamma\varepsilon}^{A\alpha} - \omega_{B\gamma\varepsilon}^{A\alpha} = \Gamma_{B\gamma\varepsilon\tau}^{A\alpha}\omega^{\tau} + \Gamma_{BC\gamma\varepsilon\tau}^{A\alpha}\Theta^{C\tau}, \tag{2.9}$$

kur

$$\Theta_{\gamma,\beta}^{A\alpha} = V^{B\varepsilon}\omega_{B\gamma\varepsilon\beta}^{A\alpha}, \qquad \Gamma_{BC\gamma\varepsilon\beta}^{A\alpha} = \Gamma_{CB\gamma\beta\varepsilon}^{A\alpha}.$$

Formos $\tilde{\Theta}^{A\alpha}$ turi tokią struktūrą:

$$d\tilde{\Theta}^{A\alpha} = \tilde{\Theta}^{B\gamma} \wedge \tilde{\omega}_{B\gamma}^{A\alpha} + R_{\gamma\varepsilon}^{A\alpha}\omega^{\varepsilon} \wedge \omega^{\gamma}, \tag{2.10}$$

kur

$$\tilde{\omega}_{B\gamma}^{A\alpha} = \omega_{B\gamma}^{A\alpha} + \Gamma_{B\varepsilon\gamma}^{A\alpha}\omega^{\varepsilon}, \tag{2.11}$$

$$R_{\gamma,\varepsilon}^{A\alpha} = 2\left(\Gamma_{[\gamma,\varepsilon]}^{A\alpha} - \Gamma_{B[\gamma|\tau|}^{A\alpha}\Gamma_{\varepsilon]}^{B\tau}\right). \tag{2.12}$$

Formas $\tilde{\omega}_{B\gamma}^{A\alpha}$ vadinsime nepilno pseudolinearinio sąryšio formomis, o objektą $\Gamma_{B\varepsilon\gamma}^{A\alpha}$ – nepilno pseudolinearinio sąryšio objektu.

TEOREMA. *Erdvės $P_{n,v}$ nepilno afininio sąryšio objektas yra indukuojamas nepilno pseudolinearinio sąryšio objekto.*

Įrodymas. Jeigu $h_{A\varepsilon}^{A\varepsilon} \neq -N$, matrica $H_{\tau\gamma}^{\alpha\varepsilon} = N\delta_{\tau}^{\alpha}\delta_{\gamma}^{\varepsilon} + \delta_{\gamma}^{\alpha}h_{A\tau}^{A\varepsilon}$ turi atvirkštiną matricą $\tilde{H}_{\tau\alpha}^{\gamma\varepsilon}$. Dydžiai

$$\Gamma_{\gamma\varepsilon}^{\alpha} = \tilde{H}_{\gamma\tau}^{\sigma\alpha}\Gamma_{A\varepsilon\sigma}^{A\tau} \tag{2.13}$$

tenkina diferencialines lygtis

$$\Delta\Gamma_{\gamma\varepsilon}^{\alpha} - \omega_{\gamma\varepsilon}^{\alpha} = 0 \bmod (\omega^{\alpha}, \Theta^{A\alpha}) \tag{2.14}$$

ir jie yra erdvės $P_{n,v}$ nepilno afininio sąryšio objektas.

Erdvės $P_{n,v}$ su nepilnu pseudolineariniu sąryšiu struktūros lygtys yra:

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha} \wedge \tilde{\omega}_{\gamma}^{\alpha} + R_{\varepsilon,\gamma}^{\alpha}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\varepsilon},$$

$$d\tilde{\omega}^{A\alpha}_{B\gamma} = \tilde{\omega}^{C\varepsilon}_{B\gamma} \wedge \tilde{\omega}^{A\alpha}_{C\varepsilon} + \frac{1}{2} R^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma\tau}\omega^{\tau} \wedge \omega^{\varepsilon} + \Gamma^{A\alpha}_{BC\varepsilon\gamma\tau}\tilde{\Theta}^{B\tau} \wedge \omega^{\varepsilon}, \tag{2.15}$$

$$d\tilde{\Theta}^{A\alpha} = \tilde{\Theta}^{B\gamma} \wedge \tilde{\omega}^{A\alpha}_{B\gamma} + \frac{1}{2} R^{A\alpha}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon} \wedge \omega^{\gamma},$$

kur

$$R^{\alpha}_{\varepsilon,\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{[\varepsilon,\gamma]}, \tag{2.16}$$

$$R^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma\tau} = 2\left(\Gamma^{A\alpha}_{B[\varepsilon|\gamma|\tau]} + \Gamma^{C\sigma}_{B[\varepsilon|\gamma|}\Gamma^{A\alpha}_{|c|\tau]\sigma} - \Gamma^{A\alpha}_{BC[\varepsilon|\gamma\sigma|}\Gamma^{C\sigma}_{\tau]}\right). \tag{2.17}$$

Iš (2.14) ir (2.16) lygčių išplaukia, kad $R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ yra tenzorius, kurį vadinsime nepilno afininio sąryšio sukinio tenzoriumi.

Dydžius $R^{A\alpha}_{B\gamma\varepsilon\delta}$ vadinsime nagrinėjamo nepilno afininio sąryšio pirmuoju kreivumo pseudolinearu, o $\Gamma^{A\alpha}_{BC\varepsilon\gamma\delta}$ – antruoju kreivumo pseudolinearu.

3. BENDRASIS ERDVĖS $P_{n,v}$ PSEUDOLINEARINIS SĄRYŠIS

Bendrąjį pseudolinearinį sąryšį apibrėšime formomis

$$\tilde{\omega}^{A\alpha}_{B\gamma} = \omega^{A\alpha}_{B\gamma} + \Gamma^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma}\omega^{\varepsilon} + C^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon}\Theta^{C\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Šis sąryšis invariantinis (2.3) transformacijos atžvilgiu, jeigu

$$\Gamma^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma}(x,\lambda v) = \Gamma^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma}(x,v), \qquad C^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon}(x,\lambda v) = \lambda^{-1}C^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon}(x,v); \tag{3.2}$$

be to,

$$C^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon}V^{C\varepsilon} = 0. \tag{3.3}$$

Sakykime

$$\tilde{\Theta}^{A\alpha} = dV^{A\alpha} + \tilde{\omega}^{A\alpha}_{B\gamma}V^{B\gamma}. \tag{3.4}$$

Tuomet

$$\tilde{\Theta}^{A\alpha} = E^{A\alpha}_{B\gamma}\Theta^{B\gamma} + E^{A\alpha}_{\gamma}\omega^{\gamma}, \tag{3.5}$$

kur

$$E^{A\alpha}_{B\gamma} = \delta^{A}_{B}\delta^{\alpha}_{\gamma} + C^{A\alpha}_{CB\varepsilon\gamma}V^{C\varepsilon}, \tag{3.6}$$

$$E^{A\alpha}_{\gamma} = \Gamma^{A\alpha}_{B\gamma\varepsilon}V^{B\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Reikalaudami, kad

$$C^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon}V^{B\gamma} = 0, \tag{3.8}$$

gausime:

$$\tilde{\Theta}^{A\alpha} = \Theta^{A\alpha} + E^{A\alpha}_{\gamma}\omega^{\gamma}. \tag{3.9}$$

Remdamiesi (3.9), (3.1) užrašysime taip:

$$\tilde{\omega}^{A\alpha}_{B\gamma} = \omega^{A\alpha}_{B\gamma} + \widehat{\Gamma}^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma}\omega^{\varepsilon} + C^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon}\tilde{\Theta}^{C\varepsilon}, \tag{3.10}$$

kur

$$\widehat{\Gamma}^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma} = \Gamma^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma} - C^{A\alpha}_{BC\gamma\sigma}E^{C\sigma}_{\varepsilon}. \tag{3.11}$$

TEOREMA. *Bendrojo afininio sąryšio objektas* $(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, C^{\alpha}_{B\beta\gamma})$ *yra aprėpiamas bendruoju pseudolinearinio sąryšio objektu* $(\Gamma^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma}, C^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon})$.

Įrodymas. Nesunku pastebėti, kad dydžiai

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} = \tilde{H}^{\sigma\alpha}_{\gamma\tau}\widehat{\Gamma}^{A\tau}_{A\varepsilon\sigma}, \tag{3.12}$$

$$C^{\alpha}_{B\varepsilon\gamma} = \tilde{H}^{\sigma\alpha}_{\varepsilon\tau}C^{A\tau}_{AB\sigma\gamma} \tag{3.13}$$

tenkina diferencialines lygtis

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} - \omega^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} = 0 \bmod (\omega^{\alpha}, \Theta^{A\alpha}), \tag{3.14}$$

$$\Delta C^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma} = 0 \bmod (\omega^{\alpha}, \Theta^{A\alpha}). \tag{3.15}$$

ir juos galima laikyti bendrojo afininio sąryšio objekto komponentėmis.

Pseudolineara

$$N^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma} = \widehat{\Gamma}^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma} - \delta^{A}_{B}\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\omega^{\varepsilon} - \delta^{\alpha}_{\gamma}h^{A\sigma}_{A\tau}\Gamma^{\tau}_{\varepsilon\sigma}, \tag{3.16}$$

$$M^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon} = C^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon} - \delta^{A}_{B}C^{\alpha}_{C\gamma\varepsilon} - \delta^{\alpha}_{\gamma}h^{A\sigma}_{B\tau}C^{\tau}_{C\varepsilon\sigma} \tag{3.17}$$

bendruoju atveju nelygūs nuliui ir juos vadinsime atitinkamai pirmuoju ir antruoju neafiniškumo pseudolinearais.

Nesunku patikrinti, kad

$$N^{A\alpha}_{A\varepsilon\gamma} = M^{A\alpha}_{AC\gamma\varepsilon} = 0. \tag{3.18}$$

Erdvės $P_{n,v}$ su bendruoju pseudolineariniu sąryšiu struktūros lygtys yra tokios:

$$\begin{aligned} d\omega^{\alpha} &= \omega^{\gamma}\wedge\tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon}\wedge\omega^{\gamma} + C^{A}_{B\gamma\varepsilon}\tilde{\Theta}^{B\varepsilon}\wedge\omega^{\gamma},\\ d\tilde{\omega}^{A\alpha}_{B\gamma} &= \tilde{\omega}^{C\varepsilon}_{B\gamma}\wedge\tilde{\omega}^{A\alpha}_{C\varepsilon} + \frac{1}{2}R^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma\tau}\omega^{\tau}\wedge\omega^{\varepsilon} + \frac{1}{2}S^{A\alpha}_{BCD\gamma\varepsilon\tau}\tilde{\Theta}^{D\tau}\wedge\tilde{\Theta}^{C\varepsilon},\\ d\tilde{\Theta}^{A\alpha} &= \tilde{\Theta}^{B\gamma}\wedge\tilde{\omega}^{A\alpha}_{B\gamma} + \frac{1}{2}R^{A\alpha}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon}\wedge\omega^{\gamma} + \frac{1}{2}S^{A\alpha}_{BC\varepsilon\gamma}\tilde{\Theta}^{C\gamma}\wedge\tilde{\Theta}^{B\varepsilon} + P^{A\alpha}_{B\gamma\varepsilon}\omega^{\gamma}\wedge\tilde{\Theta}^{B\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

$R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ vadinsime erdvės $P_{n,v}$ su bendruoju pseudolineariniu sąryšiu sukinio tenzoriumi, $C^{\alpha}_{B\gamma\varepsilon}$ – sukinio pseudolinearu, pseudolinearus $R^{A\alpha}_{B\varepsilon\gamma\tau}$, $S^{A\alpha}_{BCD\gamma\varepsilon\tau}$ ir $P^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon\delta}$ – atitinkamai pirmuoju, antruoju ir trečiuoju kreivumo pseudolinearais, o pseudolinearus $R^{A\alpha}_{\gamma\varepsilon}$, $S^{A\alpha}_{BC\gamma\varepsilon}$ ir $P^{A\alpha}_{B\gamma\varepsilon}$ – atitinkamai pirmuoju, antruoju ir trečiuoju papildomo kreivumo pseudolinearais.

(3.19) formulėse esantys objektai yra gauti iš (3.1) sąryšio objektų ir jų atitinkamų pratęsimų komponenčių.

Diferencijuodami (3.19) išoriniu būdu ir prilyginę nuliui koeficientus prie nepriklausomų kubinių formų $\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}$, $\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}\wedge\tilde{\Theta}^{A\gamma}$, $\omega^{\varepsilon}\wedge\tilde{\Theta}^{A\alpha}\wedge\tilde{\Theta}^{B\gamma}$, $\tilde{\Theta}^{A\alpha}\wedge\tilde{\Theta}^{B\gamma}\wedge\tilde{\Theta}^{C\varepsilon}$, gauname erdvės $P_{n,v}$ su pilnu pseudolineariniu sąryšiu Bianki tapatybių analogus. Dėl vietos stokos jų čia nepateikiame.

LITERATŪRA

[1] Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многобразии, Труды Моск. Мат. об-ва, 1953, т. 2, 275–382.

[2] Ю. Шинкунас, О пространстве опорных линеаров, *Лит. Мат. Сб.*, **6** (3) (1966), 449–455.

[3] J. Šinkūnas, Apie sąryšius atraminių pseudoobjektų erdvėje, 32 LMD konferencijos tezės, Vilnius, 1991.

La connexion pseudolinéarique dans l'espace des pseudolinéars d'appuis

J. Šinkūnas (VPU)

L'espace des éléments d'appuis dont élément d'appui est définie par (1.6) s'appelle l'espace des pseudolinéars d'appuis. On développe la théorie de curbure de cet espace à connexion pseudolinéarique défini par (3.1).