LMD konf. darbai, 155–162
1997, Vilnius

Sveikaskaitinių daugianarių ir jų sandaugų sumų apskaičiavimo formulių išvedimo algoritmizavimas

A. Šukys (VU)

Sudarant objektų bei procesų matematinius modelius, egzistuojančių dėsningumų suradimas ir jų matematinis išreiškimas reikalauja nemažai išradingumo.

Kartais, išvedant formules, naudinga pasitelkti algebros aparatą, kuris leidžia beveik automatiškai „išgaudyti" ne visada lengvai pastebimus dėsningumus, nenagrinėjant sudėtingų priežastinių ryšių.

Pavyzdžiui, norėdami išvesti formulę, išreiškiančią lėktuvo keliamosios jėgos F priklausomybę nuo jo greičio v, sparnų ploto S bei oro tankio ϱ, mes gana pagrįstai galime priimti hipotezę, jog F turėtų būti proporcinga sandaugai $v^\alpha S^\beta \varrho^\gamma$, kur α, β, γ – kol kas neapibrėžti laipsnių rodikliai. Atsižvelgdami į dydžių F, v, S ir ϱ dimensijas, gauname lygybę $\frac{cm\cdot g}{s^2} = \left(\frac{cm}{s}\right)^\alpha \cdot (cm^2)^\beta \cdot \left(\frac{g}{cm^3}\right)^\gamma$, iš kurios išplaukia lygtys: $\alpha + 2\beta - 3\gamma = 1$, $\alpha = 2$, $\gamma = 1$. Jas išsprendę, gauname formulę $F = C\varrho S v^2$, kur C – proporcingumo koeficientas, priklausantis nuo lėktuvo formos ir nustatomas bandymais aerodinaminiame vamzdyje.

Toks formulės išvedimo būdas yra žymiai paprastesnis negu klasikinis, besiremiantis energijos tvarumo ir dujų dinamikos dėsniais.

Šiame straipsnyje, naudojantis algebros metodais, algoritmizuojamas sveikaskaitinių daugianarių ir jų sandaugų sumų apskaičiavimo formulių išvedimas. Sudėtingos formulės gaunamos žymiai papraščiau negu jos išvedamos kai kuriuose vadovėliuose, ir jų išvedimą, naudojantis paketu MAPLE, galima net automatizuoti. Studentai, supažindinti su metodu, sugeba patys išvesti kai kurias formules, ir tokiu būdu sutaupomas paskaitų laikas.

1.

TEOREMA 1. *Visiems sveikaskaitiniams $n > 0$ ir $k > 0$ egzistuoja tokie $a_j^{(k)}$, nepriklausantys nuo n ir galintys priklausyti tik nuo k, kad sveikaskaitinė funkcija $f(n,k) = \sum_{i=0}^{n} i^k$ būtų tapati daugianariui $\sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)} n^j$.*

Įrodysime šią teoremą.

1.1.

$$f(n,k)=\sum_{j=0}^{n} j^k=\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^k=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j n^{k-j} i^j$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\Big[n^k+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j C_k^j n^{k-j} i^j\Big]=n^{k+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j C_k^j n^{k-j} i^j . \tag{1}$$

Formulė (1) – ne aukštesnio negu $k+1$ laipsnio daugianaris $\sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)} n^j$.

1.2.

$$f(n-1,k)=\sum_{j=0}^{n-1} j^k=\sum_{i=0}^{n-1}\big[(n-1)-i\big]^k=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j (n-1)^{k-j} i^j . \tag{2}$$

Formulę (2) galima gauti iš formulės (1), pakeičiant n į $n-1$, todėl formulės $f(n,k)=\sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)} n^j$ ir $f(n-1,k)=\sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)}(n-1)^j$ turi tuos pačius koeficientus $a_j^{(k)}$. Iš čia išplaukia, jog $a_j^{(k)}$ nepriklauso nuo n, nes panašias išvadas galima padaryti ir porų $f(n+1,k)$, $f(n,k)$ bei $f(n-1,k)$, $f(n-2,k)$ ir t.t. atžvilgiu.

1.3. Kadangi $\forall n>0 \forall k \geqslant 0$ $\{[f(n,k)-f(n-1,k)]\equiv n^k\}$, tai

$$\forall n>0 \quad \forall k>0 \quad \left\{\sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)}\big[n^j-(n-1)^j\big]\equiv n^k\right\} . \tag{3}$$

Tuo pasinaudodami, galime rasti $a_j^{(k)}$ reikšmes, kai $j>0$.

1.4.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)}\big[n^j-(n-1)^j\big]\equiv\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{s=1}^{j}(-1)^{s-1}a_j^{(k)}C_j^s n^{j-s}\\
&\equiv n^k a_{k+1}^{(k)}C_{k+1}^1+n^{k-1}\Big(-a_{k+1}^{(k)}C_{k+1}^2+a_k^{(k)}C_k^1\Big)\\
&\quad+n^{k-2}\Big(a_{k+1}^{(k)}C_{k+1}^3-a_k^{(k)}C_k^2+a_{k-1}^{(k)}C_{k-1}^1\Big)\\
&\quad+n^{k-3}\Big(-a_{k+1}^{(k)}C_{k+1}^4+a_k^{(k)}C_k^3-a_{k-1}^{(k)}C_{k-1}^2+a_{k-2}^{(k)}C_{k-2}^1\Big)+\cdots\\
&\quad+n^{k-i}\Big[(-1)^i a_{k+1}^{(k)}C_{k+1}^{i+1}+(-1)^{i-1}a_k^{(k)}C_k^i+\cdots+(-1)^0 a_{k+1-i}^{(k)}C_{k+1-i}^1\Big]+\cdots\\
&\quad+n\Big[(-1)^{k-1}a_{k+1}^{(k)}C_{k+1}^k+(-1)^{k-2}a_k^{(k)}C_k^{k-1}+\cdots+(-1)^0 a_2^{(k)}C_2^1\Big]\\
&\quad+\Big[(-1)^k a_{k+1}^{(k)}C_{k+1}^{k+1}+(-1)^{k-1}a_k^{(k)}C_k^k+\cdots+(-1)^0 a_1^{(k)}C_1^1\Big].
\end{aligned} \tag{4}$$

1.5. Kadangi tapatybėje (3) abiejose jos pusėse koeficientai prie vienodų kintamojo n laipsnių turi būti vienodi, tai gauname lygčių sistemą, leidžiančią apskaičiuoti $a_j^{(k)}$ reikšmes:

$$\left.\begin{cases} a_{k+1}^{(k)} C_{k+1}^1 = 1\,, \\ -a_{k+1}^{(k)} C_{k+1}^2 + a_k^{(k)} C_k^1 = 0\,, \\ a_{k+1}^{(k)} C_{k+1}^3 - a_k^{(k)} C_k^2 + a_{k-1}^{(k)} C_{k-1}^1 = 0\,, \\ -a_{k+1}^{(k)} C_{k+1}^4 + a_k^{(k)} C_k^3 - a_{k-1}^{(k)} C_{k-1}^2 + a_{k-2}^{(k)} C_{k-2}^1 = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{s=0}^{i} (-1)^{i-s} a_{k+1-s}^{(k)} C_{k+1-s}^{i+1-s} = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} a_{k+1-s}^{(k)} C_{k+1-s}^{k+1-s} = 0\,. \end{cases}\right\} \tag{5}$$

1.6. Iš pirmosios lygties gauname: $a_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{C_{k+1}^1} = \frac{1}{k+1}$. (6)

1.7. Iš antrosios lygties gauname: $a_k^{(k)} = \frac{a_{k+1}^{(k)} C_{k+1}^2}{C_k^1} = \frac{1}{2}$. (7)

1.8. Iš trečiosios: $a_{k-1}^{(k)} = \frac{a_k^{(k)} C_k^2 - a_{k+1} C_{k-1}^3}{C_{k-1}^1} = \frac{k}{12}$. (8)

1.9. Analogiškai gauname:

$$\left.\begin{array}{l} a_{k-2}^{(k)} = 0; \quad a_{k-3}^{(k)} = -\dfrac{k(k-1)(k-2)}{6!}; \quad a_{k-4}^{(k)} = 0; \\ a_{k-5}^{(k)} = \dfrac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{7!6}; \quad a_{k-6}^{(k)} = 0; \\ a_{k-7}^{(k)} = -\dfrac{k(k-1)\cdots(k-6)}{8!30}; \quad a_{k-8}^{(k)} = 0; \\ a_{k-9}^{(k)} = \dfrac{k(k-1)\cdots(k-6)(k-7)(k-8)}{9!132} \quad \text{ir} >> \text{t.t.} \end{array}\right\} \tag{9}$$

1.10. Koeficientą $a_0^{(k)}$ galima rasti iš lygybės

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)} n^j = a_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{k+1} a_j^{(k)} n^j\,, \tag{10}$$

kai $n = 0$, iš kur išplaukia:

$$a_0^{(k)} = 0; \quad f(n,k) = \sum_{j=1}^{k+1} a_j^{(k)} n^j; \quad f(1,k) = \sum_{j=1}^{k+1} a_j^{(k)} = 1.$$

1.11. Mes ne tik įrodėme teoremoje 1 minimų koeficientų egzistavimą, bet ir suradome jų reikšmių apskaičiavimo algoritmą. Teorema 1 įrodyta.

2.

Naudodamiesi išvestomis formulėmis, galime apskaičiuoti funkcijos $f(n,k)$ reikšmes įvairiems k.

2.1.

$$f(n,1) = \sum_{j=1}^{2} a_j^{(1)} n^j = a_2^{(1)} n^2 + a_1^{(1)}; \quad a_2^{(1)} = a_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2};$$
$$a_1^{(1)} = a_k^{(k)} = \frac{1}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{11}$$

2.2.

$$f(n,2) = \sum_{j=1}^{3} a_j^{(2)} n^j; \quad a_3^{(2)} = a_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{k+1} = 3;$$
$$a_2^{(2)} = a_k^{(k)} = \frac{1}{2}; \quad a_1^{(2)} = a_{k-1}^{(k)} = \frac{k}{12} = \frac{1}{6}; \tag{12}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.3.

$$f(n,3) = a_4^{(3)} n^4 + a_3^{(3)} n^3 + a_2^{(3)} n^2 + a_1^{(3)} n;$$
$$a_4^{(3)} = \frac{1}{4}; \quad a_3^{(3)} = \frac{1}{2}; \quad a_2^{(3)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}; \quad a_1^{(3)} = a_{k-2}^{(k)} = 0; \tag{13}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2.$$

2.4.

$$f(n,4) = a_5^{(4)} n^5 + a_4^{(4)} n^4 + a_3^{(4)} n^3 + a_2^{(4)} n^2 + a_1^{(4)} n;$$
$$a_5^{(4)} = \frac{1}{5}; \quad a_4^{(4)} = \frac{1}{2}; \quad a_3^{(4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}; \quad a_2^{(4)} = 0;$$
$$a_1^{(4)} = a_{k-3}^{(k)} = -\frac{k(k-1)(k-2)}{6!} = -\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{720} = -\frac{1}{30}; \tag{14}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)}{30}\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right).$$

2.5. Analogiškai gauname, jog

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{12}\left(2n^2 + 2n - 1\right), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^6 &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n = \\ &= \frac{n(n+1)}{42}\left(6n^5 + 15n^4 + 6n^3 - 6n^2 - n + 1\right),\end{aligned} \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n \quad \text{ir} >> \text{t.t.} \tag{20}$$

3.

TEOREMA 2. *Visiems sveikaskaitiniams $n > 0$ ir $k > 0$ sveikaskaitinių daugianarių $\sum_{i=0}^{k} A_i x^i$ suma $\sum_{x=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} A_i x^i$, kur A_i – pastovūs koeficientai, o x – sveikaskaitinis kintamasis, yra tapačiai lygi daugianariui $\sum_{j=0}^{k+1} B_j n^j$, kur B_j nepriklauso nuo n, tačiau gali priklausyti nuo $A_k, A_{k-1}, A_{k-2}, \ldots, A_i, \ldots, A_1, A_0$ bei nuo k ir gali būti apskaičiuoti neapibrėžtųjų koeficientų metodu.*

Ši teorema įrodoma, remiantis teorema 1 ir formulėmis $f(n,k) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)} n^j$ bei koeficientų $a_j^{(k)}$ apskaičiavimo formulėmis.

3.1.

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} A_i x_i &= A_k \sum_{j=1}^{k+1} a_j^{(k)} n^j + A_{k-1} \sum_{j=1}^{k} a_j^{k-1} n_j + \cdots \\ &\quad + A_2 \sum_{j=1}^{3} a_j^{(2)} n^j + A_1 \sum_{j=1}^{2} a_j^{(1)} n^j + A_0(n+1) \\ &= A_k a_{k+1}^{(k)} n^{k+1} + \left(A_k a_k^{(k)} + A_{k-1} a_k^{(k-1)}\right) n^k \\ &\quad + \left(A_k a_{k-1}^{(k)} + A_{k-1} a_{k-1}^{(k-1)} + A_{k-2} a_{k-1}^{(k-2)}\right) n^{k-1}\end{aligned} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+\left(A_k a_2^{(k)}+A_{k-1}a_2^{(k-1)}+\cdots+A_2a_2^{(2)}+A_1a_2^{(1)}\right)n^2\\
&+\left(A_k a_1^{(k)}+A_{k-1}a_1^{(k-1)}+\cdots+A_2a_1^{(2)}+A_1a_1^{(1)}+A_0\right)n+A_0\\
&=\sum_{j=0}^{k+1}B_jn^j,
\end{aligned}
$$

kur $B_{k+1}=A_ka_{k+1}^{(k)}$, $B_k=A_ka_k^{(k)}+A_{k-1}a_k^{(k-1)}, \dots$

$$
B_j=\sum_{s=j-1}^{k}A_sa_j^{(s)},\dots,B_2=\sum_{s=1}^{k}A_sa_2^{(s)},\quad B_1=A_0+\sum_{s=1}^{k}A_sa_1^{(s)},\quad B_0=A_0.
$$

3.2. Koeficientų B_j reikšmes galima surasti ir nesinaudojant ką tik išvestomis formulėmis. Jas nesunku apskaičiuoti neapibrėžtųjų koeficientų metodu, apskaičiuojant sumas $S_n^{(1)}=\sum_{x=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}A_ix^i$ bei $S_n^{(2)}=\sum_{j=0}^{k+1}B_jn^j$ taškuose $n=0,1,2,\dots,k,k+1$ ir sudarant bei sprendžiant $k+2$ tiesinių lygčių sistemą.

Pailiustruosiu tai pavyzdžiu. Tarkime, jog mums reikia išvesti sumos $\sum_{x=0}^{n}(3x^2+2x+4)$ apskaičiavimo formulę $\sum_{j=0}^{3}B_jn^j$. Kadangi $S_0^{(1)}=4$, $S_1^{(1)}=13$, $S_2^{(1)}=33$, $S_3^{(1)}=70$, $S_0^{(2)}=B_0$, $S_1^{(2)}=B_3+B_2+B_1+B_0$, $S_2^{(2)}=8B_3+4B_2+2B_1+B_0$, $S_3^{(2)}=27B_3+9B_2+3B_1+B_0$, tai gauname lygčių sistemą:

$$
\begin{cases}
B_0=4,\\
B_3+B_2+B_1+B_0=13,\\
8B_3+4B_2+2B_1+B_0=33,\\
27B_3+9B_2+3B_1+B_0=70,
\end{cases}
$$

iš kur $B_3=1$; $B_2=2,5$; $B_1=5,5$; $B_4=4$. Todėl $\sum_{x=0}^{n}(3x^2+2x+4)=n^3+2,5n^2+5,5n+4$.

4.

Iš formulės $\sum_{x=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}A_ix^i=\sum_{j=0}^{k+1}B_jn^j$, kai $m>n>0$, išplaukia formulė

$$
\sum_{x=n}^{m}\sum_{i=0}^{k}A_ix^i=\sum_{j=0}^{k+1}B_j\left[m^j-(n-1)^j\right]. \tag{22}
$$

5.

Galima išvesti formulę ir daugianarių sandaugų sumos apskaičiavimui. Pavyzdžiui,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=n}^{m}\sum_{y=p}^{r}\left[\left(\sum_{i=0}^{k}A_ix^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{q}D_jy^j\right)\right]\\
&=\left(\sum_{j=0}^{k+1}B_j\left[m^j-(n-1)^j\right]\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{q+1}E_i\left[r^i-(p-1)^i\right]\right),
\end{aligned} \tag{23}
$$

kur koeficientai B_j ir E_i gali būti rasti, naudojantis neapibrėžtųjų koeficientų metodu. Galima naudotis ir antrojo skyrelio formulėmis. Pavyzdžiui,

$$\sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{p} x^2y^3 = \left(\sum_{x=0}^{n} x^2\right)\cdot\left(\sum_{y=0}^{p} y^3\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2.$$

6.

Galima išvesti formules ir sudėtingesnių sandaugų sumų apskaičiavimui. Pavyzdžiui

$$\sum_{x_1=n_1}^{m_1}\sum_{x_2=n_2}^{m_2}\cdots\sum_{x_s=n_s}^{m_s}\cdots\sum_{x_v=n_v}^{m_v}\left[\left(\sum_{i=0}^{k_1} A_i^{(1)}x_1^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k_2} A_i^{(2)}x_2^i\right)\cdots\left(\sum_{i=0}^{k_v} A_i^{(v)}x_v^i\right)\right]$$
$$= \left(\sum_{j=0}^{k_1+1} B_j^{(1)}\left[m_1^j - (n_1-1)^j\right]\right)\cdots\left(\sum_{j=0}^{k_v+1} B_j^{(v)}\left[m_v^j - (n_v-1)^j\right]\right). \qquad (24)$$

7.

Čia aprašytą formulių išvedimo metodą galima taikyti ne tik skaičiavimo matematikoje, pavyzdžiui, artutiniuose skaičiavimuose bei jų paklaidų vertinime, bet ir matematinėje statistikoje.

Pavyzdžiui, nagrinėjant rangų koreliacijoje naudojamą statistiką

$$s = \sum_{i=1}^{n}\left[\operatorname{rank}(x_i) - \operatorname{rank}(y_i)\right]^2$$

ir išvedant jos matematinio vidurkio $\bar{s}$ ir dispersijos D_s formules $\bar{s}(n)$ ir $D_s(n)$, vietoj gana sudėtingų samprotavimų ir skaičiavimų tas formules galima gauti „automatiškai“. Kadangi $\bar{s}$ turi turėti tą pačią „dimensiją“ kaip ir s, tai $\bar{s}(n) = \sum_{j=0}^{3} B_j^{(s)} n^j$. Analogiškai gauname, kad $D_s(n) = \sum_{j=0}^{5} B_j^{(D)} n^j$. Tiesioginiais paskaičiavimais nustatę, jog $\bar{s}(0) = 0$; $\bar{s}(1) = 0$; $\bar{s}(2) = 1$; $\bar{s}(3) = 4$; $D_s(0) = 0$; $D_s(1) = 0$; $D_s(2) = 1$; $D_s(3) = 8$; $D_s(4) = \frac{100}{3}$; $D_s(5) = 100$ ir išsprendę dvi tiesines lygčių sistemas su keturiais ir šešiais nežinomaisiais, surandame $B_j^{(s)}$ ir $B_j^{(D)}$ reikšmes, kurias įstatę gauname:

$$\bar{s}(n) = \frac{n(n^2-1)}{6}, \qquad D_s(n) = \frac{n^2(n+1)(n^2-1)}{36}.$$

„Automatiškai“ gali būti išvestos ir ekspertų įverčių konkordacijos koeficientų bei eilė kitų sudėtingų formulių [1, 2].

LITERATŪRA

[1] A. Šukys, Objektų, kurių požymių reikšmės sudaro begalines skaičias aibes, kodavimo, rikiavimo ir jų numerių apskaičiavimo algoritmai, LMD XXXIV konf. pranešimų tezės, II, Vilnius, 1993.

[2] A. Šukys, Numeruoto objekto požymių numerių apskaičiavimas, Ten pat.

Algoritmization of integer polynomials and deduction of formulas for calculations of the sums of their products

A. Šukys

The article deals with an algorithm of deducing such formulas that make easy their realization by computer. The formulas deduced can be applied in calculus, algebra, analysis of indefinite sums and in mathematical statistics.