LMD konf. darbai, 236–240
1997, Vilnius

Dviejų mažų parametrų metodo taikymo klausimu

E. Astrauskienė, K. Ragulskis, I. Tiknevičienė (KTU)

Nagrinėjama sudėtinga sistema, kuri susideda iš kieto kūno, pritvirtinto prie nejudamo pagrindo tampriais – disipatyviniais elementais, bei prie to kūno pritvirtintų mechanizmų – mašinų, kurios gali atlikti rotacinius judesius. Nustatytos kartotinės sinchronizacijos reiškinio egzistavimo sąlygos.

Plokščios sistemos atveju judesio diferencialinės lygtys yra

$$M_{ins} + M_{ps} + M_{vs} = M_{es} \quad (s = \overline{1, q}), \tag{1}$$

$$L_i(x, y, \psi) = F_i(\varphi_s) \quad (i = \overline{1, 3}), \tag{2}$$

čia

$M_{ins} = J_s(\varphi_s) \cdot \ddot{\varphi}_s + 0{,}5 \cdot J_s'(\varphi_s) \cdot \dot{\varphi}_s^2$, $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ – inercijos momentai,

$M_{ps} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_s}$ – potencinių jėgų momentai,

$M_{vs} = M_{vs}(x, y, \psi, \varphi_s)$ – vibraciniai momentai,

$M_{es} = M_{es}(\dot{\varphi}_s)$ – išorinių jėgų momentai,

$L_i(x, y, \psi)$ – nešančio kūno inercijos jėgos,

$F_i(\varphi_s)$ – nešančio kūno sužadinimo jėgos, kurias sukelia mechanizmai – mašinos, pritvirtinti prie to kūno,

Π – potencinė energija,

$J_s(\varphi_s)$ – s-ojo nario redukuotas inercijos momentas,

φ_s – apibendrinta s-ojo mechanizmo – mašinos koordinatė,

x, y ir ψ – nešančio kūno ortogonalūs poslinkiai ir posūkio koordinatė.

Tiriami nusistovėję režimai. (1) lygtyse tariame, kad

$$\begin{gathered} J_s(\varphi_s) = J_{s0} + \mu J_{s1}(\varphi_s), \\ M_{ps} = \mu M_{ps}, \qquad M_{vs} = \varepsilon M_{vs}, \qquad M_{es} = \varepsilon M_{es}, \end{gathered} \tag{3}$$

kai μ ir ε – maži parametrai, kurie gale skaičiavimų prilyginami vienetui.

Toms φ_s koordinatėms, kurios juda pagrindiniu kampiniu greičiu, $\mu = \varepsilon$, o toms φ_s, kurios juda kombinuotu greičiu, žemesniu už pagrindinį, naudojami abu maži parametrai μ ir ε.

Nusistovėję režimai ieškomi eilučių ε atžvilgiu pavidale

$$\varphi_h = \varphi_{h0} + \varepsilon\varphi_{h1} + \cdots \quad (h = \overline{1, l}), \tag{4}$$

$$\varphi_p = \varphi_{p0}(\mu) + \varepsilon\varphi_{p1}(\mu) + \cdots \quad (p = \overline{l, q}), \tag{5}$$

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots, \qquad y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots, \qquad \psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \cdots$$

(4) taikomos pagrindiniams tonams, o (5) kartotinės sinchronizacijos režimams. (4) eilutės narys $\varphi_{p0}(\mu)$ ieškomas eilutės μ atžvilgiu pavidale.

$$\varphi_{p0}(\mu) = \varphi_{p00} + \mu\varphi_{p01} + \cdots \tag{6}$$

Priimama, kad (4)–(6) eilutėse

$$\begin{aligned} &\varphi_{h0} = \omega t + \alpha_m, \quad \text{o} \\ &\varphi_{p00} = \frac{m}{n}\omega t + \alpha_p, \quad m, n \in N \quad \text{ir} \quad \frac{m}{n} < 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Iš φ_{h1} ir $\varphi_{p1}(\mu)$ periodiškumo sąlygų

$$\left[\overline{M_{inh} + M_{ph} + M_{vh} - M_{eh}}\right]_{x=x_0,\ y=y_0,\ \psi=\psi_0,\ \varphi_h=\varphi_{h0}} = 0, \qquad h = \overline{1, l}, \tag{8}$$

ir

$$\left[\overline{M_{inp} + M_{pp} + M_{vp} - M_{ep}}\right]_{x=x_0,\ y=y_0,\ \varphi=\varphi_0,\ \varphi_p=\varphi_{p0}(\mu)+\varepsilon\varphi_{p1}(\mu)+\cdots} = 0, \qquad p = \overline{l, q}, \tag{9}$$

gaunamos lygtys, iš kurių nustatomi parametrai ω, α_m ir α_p.

Nagrinėsime sistemą, kurios matematinis modelis yra diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} + h_x\dot{x} + p_x^2 \cdot x = X, \\ \ddot{y} + h_y\dot{y} + p_y^2 \cdot y = Y, \\ J_1\ddot{\varphi}_1 + M_{v1} + m_1 g r_1 \cos\varphi_1 = M_1(\dot{\varphi}_1), \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + M_{v2} + m_2 g r_2 \cos\varphi_2 = M_2(\dot{\varphi}_2). \end{cases} \tag{10}$$

Čia $M_1(\dot{\varphi}_1)$ ir $M_2(\dot{\varphi}_2)$ – redukuotos išorinės jėgos momentai koordinačių φ_1 ir φ_2 atžvilgiu atitinkamai,

$$\begin{aligned} X &= \mu_{x1} r_1\big(\ddot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1\big) - \mu_{x2} r_2\big(\ddot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2\big), \\ Y &= -\mu_{y1} r_1\big(\ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1\big) - \mu_{y2} r_2\big(\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2\big), \\ M_{v1} &= m_1 r_1\big(-\ddot{x}\sin\varphi_1 + \ddot{y}\cos\varphi_1\big), \\ M_{v2} &= m_2 r_2\big(\ddot{x}\sin\varphi_2 + \ddot{y}\cos\varphi_2\big). \end{aligned}$$

Nagrinėjamas režimas $\overline{\dot{\varphi}_1} = \omega$ ir $\overline{\dot{\varphi}_2} = 0{,}5\omega$.
Šiuo atveju, tarę, kad

$$\begin{aligned} m_{v1} &= \varepsilon M_{v1}, \qquad M_{v2} = \varepsilon M_{v2}, \\ m_1 g r_1 \cos\varphi_1 &= \varepsilon m_1 g r_1 \cos\varphi_1, \\ m_2 g r_2 \cos\varphi_2 &= \mu m_2 g r_2 \cos\varphi_2, \\ M_1(\dot{\varphi}_1) &= \varepsilon M_1(\dot{\varphi}_1) \quad \text{ir} \quad M_2(\dot{\varphi}_2) = \varepsilon M_2(\dot{\varphi}_2). \end{aligned}$$

gauname generuojančią lygčių sistemą

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_{10} = 0, \\ J_2\ddot{\varphi}_{20} + \mu m_2 g r_2 \cos\varphi_2 = 0, \\ \ddot{x}_0 + h_x\dot{x}_0 + p_x^2 x_0 = X_0, \\ \ddot{y}_0 + h_y\dot{y}_0 + p_y^2 y_0 = Y_0, \end{cases} \tag{11}$$

iš kurios gaunami sprendinių

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{10} + \varepsilon\varphi_{11} + \cdots, \\ \varphi_2 &= \varphi_{20}(\mu) + \varepsilon\varphi_{21}(\mu) + \cdots, \\ x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots, \\ y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots, \end{aligned} \tag{12}$$

pirmieji nariai.

(11) sistemoje

$$\begin{aligned} X_0 &= \mu_{x1} r_1 \omega^2 \cos\omega t - 0{,}25\mu_{x2} r_2 \omega^2 \cos(0{,}5\omega t + \alpha), \\ Y_0 &= \mu_{y1} r_1 \omega^2 \sin\omega t + 0{,}25\mu_{y2} r_2 \omega^2 \sin(0{,}5\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Iš (11) pirmųjų dviejų lygčių randame

$$\varphi_{10} = \omega t \quad \text{ir} \quad \varphi_{20} = \varphi_{20}(\mu) = \varphi_{200} + \mu\varphi_{201} + \cdots \ \text{narį}\ \varphi_{200} = 0{,}5\omega t + \alpha.$$

Narį φ_{201} randame iš (11) antrosios lygties, surinkę narius prie μ:

$$J_2\ddot{\varphi}_{201} + m_2 g r_2 \cos(0{,}5\omega t + \alpha) = 0.$$

Tokiu būdu,

$$\varphi_{20} = 0{,}5\omega t + \alpha + \mu\frac{4m_2 g r_2}{J_2\omega^2}\cos(0{,}5\omega t + \alpha). \tag{13}$$

Iš (11) trečios ir ketvirtos lygties gauname, kad

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\omega^2 r_1 \mu_{x1}}{D_{x1}}(\Delta_{x1}\cos\omega t + \omega h_x \sin\omega t) \\ &\quad - \frac{0{,}25\omega^2 r_2 \mu_{x2}}{D_{x2}}\big[\Delta_{x2}\cos 0{,}5(\omega t + \alpha) + 0{,}5\omega h_x \sin(0{,}5\omega t + \alpha)\big], \\ y_0 &= -\frac{\omega^2 \mu_{y1} r_1}{D_{y1}}(\omega^2 h_y \cos\omega t - \Delta y_1 \sin\omega t) \\ &\quad - \frac{0{,}25\omega^2 \mu_{y2} r_2}{D_{y2}}\big[0{,}5\omega h_y \cos(0{,}5\omega t + \alpha) + \Delta y_2 \sin(0{,}5\omega t + \alpha)\big]; \end{aligned} \tag{14}$$

čia

$$\Delta_{x1} = p_x^2 - \omega, \qquad D_{x1} = \Delta_{x1}^2 + (\omega h_x)^2, \qquad \Delta_{x2} = p_x^2 - 0{,}25\omega^2,$$
$$D_{x2} = \Delta_{x2}^2 + (0{,}5\omega h_x)^2, \qquad \Delta y_1 = p_y^2 - \omega^2, \qquad D_{y1} = \Delta_{y1}^2 + (\omega h_y)^2,$$
$$\Delta_{y2} = p_y^2 - 0{,}25\omega^2, \qquad D_{y2} = \Delta_{y2}^2 + (0{,}5\omega h_y)^2.$$

(13) eilučių narį $\varphi_{21}(\mu)$ randame iš lygties

$$J_2\ddot{\varphi}_{21} - m_2 g r_2 \sin\varphi_{20}\cdot\varphi_{21} + m_2 r_2(\ddot{x}_0 \sin\varphi_{20} + \ddot{y}_0\cos\varphi_{20}) = M_2(\dot{\varphi}_{20}). \tag{15}$$

Sprendinys ieškomas pavidale

$$\varphi_{21} = L_1 \sin(0{,}5\omega t + \alpha) + K_1 \cos 2(0{,}5\omega t + \alpha). \tag{16}$$

Į (15) įstatę (13) ir (16) ir sulyginę koeficientus prie vienodų harmonikų, randame

$$L_1 = -\frac{32M_2}{DJ_2\omega^2(8+D^2)}, \qquad K_1 = \frac{16M_2[(2+D^2)A_{x1} + 2B_{y1}]}{J_2\omega^2(8+D^2)[8A_{x1} - (8+D^2)B_{y1}]}$$

ir

$$\cos 2\alpha = \frac{2g[8M_2 + DJ_2\omega^2(L_1 + 0{,}5DK_1)]}{D^2 J_2\omega^4(B_{y1} - A_{x1})},$$

kai

$$D = \frac{4m_2r_2g}{J_2\omega^2}, \qquad A_{x1} = \frac{\Delta_{x1}\omega^2}{D_{x1}}\mu_{x1}r_1,$$
$$B_{y1} = \frac{\Delta y_1\omega^2}{D_{y1}}\mu_{y1}r_1, \qquad h_x = 0 \quad \text{ir} \quad h_y = 0. \tag{17}$$

Į (10) trečiąją lygtį, įstatę (12) pirmąją eilutę, gauname lygtį

$$J_1\ddot{\varphi}_{11} + m_1r_1(-\ddot{x}_0\sin\omega t + \ddot{y}_0\cos\omega t) + m_1gr_1\cos\omega t = M_1(\dot{\varphi}_1).$$

kurią suvidutininę randame

$$\cos\alpha = \frac{4M_1}{m_1r_1\omega^2(A_{x2} + B_{y2})}, \qquad \text{kai } h_x = 0 \text{ ir } h_y = 0.$$

Čia

$$A_{x2} = -\frac{\Delta_{x2}\omega^2}{D_{x2}}0{,}25\mu_{x1}r_2, \qquad B_{y2} = \frac{\Delta_{y2}\omega^2}{D_{y2}}0{,}25\mu_{y2}r_2.$$

Iš (17) nustatome, kad kartotinės sinchronizacijos režimas egzistuoja, kai redukuotas išorinės jėgos momentas

$$M_1 < 0{,}25m_1r_1\omega^2(A_{x2} + B_{y2}).$$

Ryšį tarp ω, M_1 ir M_2 apibrėžia lygybė

$$\frac{32M_1^2}{m_1^2r_1^2} + \frac{2gM_2A_{x2}(32 + 10D^2 + D^4)}{J_2D^2(8+D^2)} = \omega^4 A_{x2}^2, \quad \text{kai } y = 0.$$

LITERATŪRA

[1] K. Ragulskis. *Mechanisms on the Vibrating Base (Dynamics and Stability)*. Kaunas, Academy of Sciences of Lithuania, 1963.

[2] I.I. Blechman. Vibracinė mechanika. Maskva, Mokslas, 1994, 476 p. (rusų kalba).

[3] K. Ragulskis, L. Bastytė, E. Astrauskienė, M. Ragulskis. The dynamics and stability of subharmonic motions of mechanisms on a vibrating basis as essentially nonlinear systems. in: *Wave mechanical systems*, Proceedings of international seminar, Kaunas, Academy of Sciences of Lithuania, Kaunas, University of Technology, 1994, 80–83 pp.

On the application of two small parameters method

E. Astrauskienė, K. Ragulskis, I. Tiknevičienė

The carried body in the analysed vibrating system is excited by disbalanced vibrators with asynchronous engines. The analysis of multiple dynamic synchronization by an approximate analytical method of two small parameters is performed. The steady state motion of the system is determinded and the conditions of existance of multiple synchronization regimes are revealed.