

Baigtinių elementų modeliai temperatūros laukų skaičiavimo uždaviniuose

S. Turskienė (ŠU)

1. ĮVADAS

Pastaruoju metu praktikoje vis daugiau naudojama plonasienių išsišakojusių konstrukcijų, kurios dirba intensyviose šilumos mainų su aplinka sąlygose. Tokių konstrukcijų plokštelių sandūros zonose pastebimi dideli temperatūrų svyravimai, kurie turi įtakos konstrukcijos įtempto-deformuoto būvio analizei.

Šiame darbe nagrinėjami plokštelių sandūros zonų modeliavimo baigtiniais elementais būdai temperatūros laukų skaičiavimo uždaviniuose.

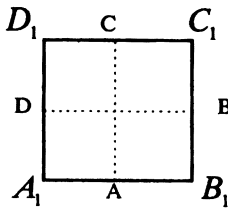
Plokštelių sandūros vietos diskretizavimo problemos nagrinėjamos [1, 2] darbuose, kur plokšteliniai elementai sujungiami trikampaiais ar keturkampiais prizminiais baigtiniais elementais. Praktiniai skaičiavimai parodė, kad tais atvejais, kai jungiamieji baigtiniai elementai jungia kitus baigtinius elementus mazguose, kurie yra vidurinėse plokštelių plokštumose, reikia vietoje kampinių prizmės mazgų naudoti prizmės pagrindų kraštinių vidurio mazgus. Temperatūros reikšmių apskaičiavimui tokiuose mazguose reikalingos specialios transformacijos matricos. Šis uždavinys pilnai išspręstas trikampėi prizmei [1].

Šiame darbe bandoma gauti koordinačių transformacijos formules, kurios keturkampės prizmės pagrindų kraštinių vidurių mazgus pervesių į prizmės kampinius mazgus, ir formules, kurios kampinių mazgų temperatūros reikšmes perskaičiuotų į pagrindų kraštinių vidurių mazgus.

2. KOORDINAČIŲ TRANSFORMACIJOS FORMULĖS

Nagrinėjamas vienodo skerspjuvio jungiamasis erdvinis baigtinis elementas, kurio pagrindas yra stačiakampis (1 pav.). Elemento mazgai yra prizmės pagrindų kraštinių vidurių taškuose ir numeruojami prieš laikrodžio rodyklę nuo pirmojo laisvai pasirinkto taško. Kraštinių vidurių taškus $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$ pervesime į kampinius taškus $A_1(x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1})$, $B_1(x_{B_1}, y_{B_1}, z_{B_1})$, $C_1(x_{C_1}, y_{C_1}, z_{C_1})$, $D_1(x_{D_1}, y_{D_1}, z_{D_1})$, t.y. taškų A_1, B_1, C_1, D_1 koordinates išreikšime taškų A, B, C, D koordinatėmis. Šio uždavinio sprendimui vartojamos iš analizinės geometrijos žinomos lygtys tiesių, einančių per duotus taškus.

Kadangi nagrinėjamos sudėtingos formos išsišakojančios konstrukcijos, tai jų baigtinių elementų schemose jungiamasis erdvinis elementas gali būti įvairiose padėtyse. Todėl panagrinėsime kelis elemento mazgų padėčių atvejus erdvėje.



Pav. 1. Jungiamojo erdvinio baigtinio elemento pagrindas.

1. $z = c = \text{const}$, $x_A + x_C = x_B + x_D$, $y_A + y_C = y_B + y_D$.

Šiuo atveju kampinių taškų koordinatės užrašomos taip:

$$A_1 \left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, c \right), \quad B_1 \left(\frac{b_1}{d}, \frac{b_2}{d}, c \right), \quad C_1 \left(\frac{c_1}{d}, \frac{c_2}{d}, c \right), \quad D_1 \left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, c \right);$$

čia

$$x_{BD} = x_B - x_D, \quad y_{BD} = y_B - y_D;$$

$$x_{AC} = x_A - x_C, \quad y_{AC} = y_A - y_C;$$

$$a_1 = -x_{AC}(x_A y_{BD} - y_A x_{BD}) + x_{BD}(x_D y_{AC} - y_D x_{AC});$$

$$a_2 = y_{BD}(x_D y_{AC} - y_D x_{AC}) - y_{AC}(x_A y_{BD} - y_A x_{BD});$$

$$b_1 = -x_{AC}(x_A y_{BD} - y_A x_{BD}) + x_{BD}(x_B y_{AC} - y_B x_{AC});$$

$$b_2 = y_{BD}(x_B y_{AC} - y_B x_{AC}) - y_{AC}(x_A y_{BD} - y_A x_{BD});$$

$$c_1 = x_{BD}(x_B y_{AC} - y_B x_{AC}) - x_{AC}(x_C y_{BD} - y_C x_{BD});$$

$$c_2 = -y_{AC}(x_C y_{BD} - y_C x_{BD}) + y_{BD}(x_B y_{AC} - y_B x_{AC});$$

$$d_1 = -x_{AC}(x_C y_{BD} - y_C x_{BD}) + x_{BD}(x_D y_{AC} - y_D x_{AC});$$

$$d_2 = y_{BD}(x_D y_{AC} - y_D x_{AC}) - y_{AC}(x_C y_{BD} - y_C x_{BD}),$$

$$x_{BD} = x_B - x_D, \quad y_{BD} = y_B - y_D;$$

$$x_{AC} = x_A - x_C, \quad y_{AC} = y_A - y_C, \quad z_{AC} = z_A - z_C,$$

$$z_{DA} = z_D - z_A, \quad z_{BA} = z_B - z_A,$$

$$z_{BC} = z_B - z_C, \quad z_{BD} = z_B - z_D, \quad z_{DC} = z_D - z_C.$$

$$\text{Būtina sąlyga, kad diskriminantas } d = \begin{vmatrix} y_{BD} & -x_{BD} \\ y_{AC} & -x_{AC} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. $z = c = \text{const}$, $x_A = x_C$, $y_B = y_D$. Šiuo atveju kampinių mazgų koordinatės yra:

$$A_1(x_D, y_A, c), \quad B_1(x_B, y_A, c), \quad C_1(x_B, y_C, c), \quad D_1(x_D, y_C, c).$$

3. $z_A = z_C$, $z_B \neq z_D$.

Kampinių mazgų koordinatės apskaičiuojamos taip:

$$A_1(x_A + x_{BD}t_1, y_A + y_{BD}t_1, z_D); \quad B_1(x_A + x_{BD}t_2, y_A + y_{BD}t_2, z_B);$$

$$C_1(x_C + x_{BD}t_3, y_C + y_{BD}t_3, z_B); \quad D_1(x_C + x_{BD}t_4, y_C + y_{BD}t_4, z_D).$$

Čia

$$t_1 = \frac{z_{DA}}{z_{BD}}, \quad t_2 = \frac{z_{BA}}{z_{BD}}, \quad t_3 = \frac{z_{BC}}{z_{BD}}, \quad t_4 = \frac{z_{DC}}{z_{BD}}.$$

4. $z_A \neq z_C, z_B = z_D$.

Kampinių taškų koordinatės užrašomos taip:

$$A_1(x_D + x_{AC}t_{11}, y_D + y_{AC}t_{11}, z_A); \quad B_1(x_B + x_{AC}t_{22}, y_B + y_{AC}t_{22}, z_A);$$

$$C_1(x_B + x_{AC}t_{33}, y_B + y_{AC}t_{33}, z_C); \quad D_1(x_D + x_{AC}t_{44}, y_D + y_{AC}t_{44}, z_C).$$

$$\text{Čia } t_{11} = \frac{z_{AD}}{z_{AC}}, t_{22} = \frac{z_{AB}}{z_{AC}}, t_{33} = \frac{z_{CB}}{z_{AC}}, t_{44} = \frac{z_{CD}}{z_{AC}}.$$

5. $z \neq \text{const}, x_A + x_C = x_B + x_D, y_A + y_C = y_B + y_D, z_A + z_C = z_B + z_D, z_A \neq z_C, z_B \neq z_D$.

Matrica M išreiškiama taip:

$$M = \begin{bmatrix} x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \\ x_{BD} & y_{BD} & z_{BD} \end{bmatrix}.$$

Jos rangas $r(M) = 2$. Iš matricos M elementų sudaromi antros eilės minorai

$$m_1 = \begin{vmatrix} y_{AC} & z_{AC} \\ y_{BD} & z_{BD} \end{vmatrix}, \quad m_2 = \begin{vmatrix} x_{AC} & z_{AC} \\ x_{BD} & z_{BD} \end{vmatrix}, \quad m_3 = \begin{vmatrix} x_{AC} & y_{AC} \\ x_{BD} & y_{BD} \end{vmatrix},$$

kurie tenkina sąlygą $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \neq 0$. Panagrinėkime atvejus:

Jei $m_1 \neq 0$, tai

$$A_1\left(x_A + x_{BD}t_1, \frac{a_3}{m_1}, \frac{a_4}{m_1}\right), \quad B_1\left(x_A + x_{BD}t_2, \frac{b_3}{m_1}, \frac{b_4}{m_1}\right),$$

$$C_1\left(x_C + x_{BD}t_3, \frac{c_3}{m_1}, \frac{c_4}{m_1}\right), \quad D_1\left(x_C + x_{BD}t_4, \frac{d_3}{m_1}, \frac{d_4}{m_1}\right).$$

Čia

$$a_3 = y_{AC}(y_A z_{BD} - z_A y_{BD}) - y_{BD}(y_D z_{AC} - z_D y_{AC});$$

$$a_4 = z_{AC}(y_A z_{BD} - z_A y_{BD}) - z_{BD}(y_D z_{AC} - z_D y_{AC});$$

$$b_3 = x_{AC}(y_A z_{BD} - z_A y_{BD}) - y_{BD}(x_B z_{AC} - z_B x_{AC});$$

$$b_4 = z_{AC}(y_A z_{BD} - z_A y_{BD}) - z_{BD}(x_B z_{AC} - z_B x_{AC});$$

$$c_3 = y_{AC}(y_C z_{BD} - z_C y_{BD}) - y_{BD}(y_B z_{AC} - z_B y_{AC});$$

$$c_4 = z_{AC}(y_C z_{BD} - z_C y_{BD}) - z_{BD}(y_B z_{AC} - z_B y_{AC});$$

$$d_3 = y_{AC}(y_C z_{BD} - z_C y_{BD}) - y_{BD}(y_D z_{AC} - z_D y_{AC});$$

$$d_4 = z_{AC}(y_C z_{BD} - z_C y_{BD}) - z_{BD}(y_D z_{AC} - z_D y_{AC}).$$

Jei $m_2 \neq 0$, tai

$$A_1\left(\frac{a_{33}}{m_2}, y_A + (y_B - y_D)t_1, \frac{a_{44}}{m_2}\right), \quad B_1\left(\frac{b_{33}}{m_2}, y_A + (y_B - y_D)t_2, \frac{b_{44}}{m_2}\right),$$

$$C_1\left(\frac{c_{33}}{m_2}, y_C + (y_B - y_D)t_3, \frac{c_{44}}{m_2}\right), \quad D_1\left(\frac{d_{33}}{m_2}, y_C + (y_B - y_D)t_4, \frac{d_{44}}{m_2}\right).$$

Čia

$$a_{33} = x_{AC}(x_A z_{BD} - z_A x_{BD}) - x_{BD}(x_D z_{AC} - z_D x_{AC});$$

$$a_{44} = z_{AC}(x_A z_{BD} - z_A x_{BD}) - z_{BD}(x_D z_{AC} - z_D x_{AC});$$

$$b_{33} = y_{BD}(x_A z_{BD} - z_A x_{BD}) - x_{BD}(x_B z_{AC} - z_B x_{AC});$$

$$b_{44} = z_{AC}(x_{AZBD} - z_A x_{BD}) - z_{BD}(x_{BZAC} - z_B x_{AC});$$

$$c_{33} = -x_{BD}(x_{BZAC} - z_B x_{AC}) + x_{AC}(x_{CZBD} - z_C x_{BD});$$

$$c_{44} = z_{AC}(x_{CZBD} - z_C x_{BD}) - z_{BD}(x_{BZAC} - z_B x_{AC});$$

$$d_{33} = x_{AC}(x_{CZBD} - z_C x_{BD}) - x_{BD}(x_{DZAC} - z_D x_{AC});$$

$$d_{44} = z_{AC}(x_{CZBD} - z_C x_{BD}) - z_{BD}(x_{DZAC} - z_D x_{AC}).$$

Jei $m_1 = m_2 = 0$, tai $m_3 = 0$, nes $z_A \neq z_C, z_B \neq z_D$. Tai prieštarauja sąlygai $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \neq 0$.

3. TEMPERATŪROS REIKŠMĖS

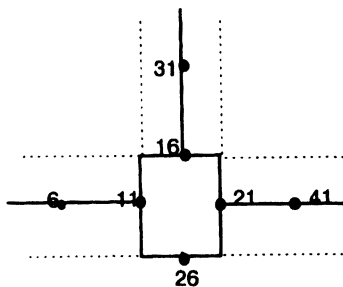
Tuo atveju, kai konstrukcijos baigtinių elementų schema sudaroma tik iš jungiamųjų keturkampių elementų, kampinių mazgų temperatūros reikšmės perskaičiuojamos iš pagrindų kraštinių vidurių mazgus pagal žinomas iš geometrijos atkarpos vidurio taško koordinatinių skaičiavimo formules. Priešingu atveju naudojamos specialios transformacijos formulės.

4. SKAIČIAVIMO REZULTATAI

Gautų formulių teisingumą iliustruosime testu, kurio kontroliniai sprendiniai yra skelbti kituose darbuose.

Nagrinėjama šaldoma trišakė konstrukcija [1], kurios skerspjūvio baigtinių elementų schema pavaizduota 2 pav.

Analizei pasirinkti taškai 11, 16, 21, 26 (2 pav.). Temperatūros reikšmių skaičiavimo rezultatai pavaizduoti 1 lentelėje.

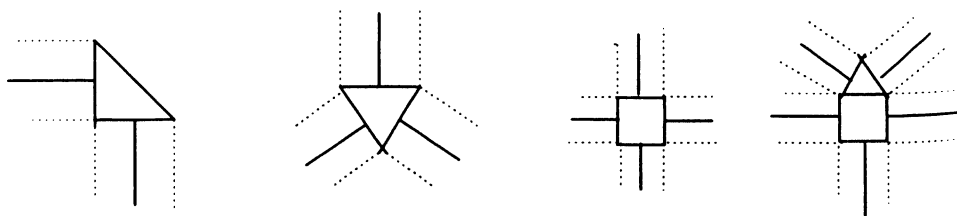


Pav. 2. Konstrukcijos skerspjūvio baigtinių elementų schema.

1 lentelė

Temperatūros reikšmės

Mazgų numeriai (2 pav.)	Gautos temperatūros reikšmės	Kontrolinės temperatūros reikšmės
11	-73.2	-73.5
16	-59.2	-59.8
21	-73.2	-73.5
26	-80.2	-80.6



Pav. 3. Baigtinių elementų jungimo schemas.

5. IŠVADOS

1. Gautos koordinatinių transformacijos ir temperatūros reikšmių apskaičiavimo formulės, kurios leidžia, sudarant nagrinėjamo objekto baigtinių elementų schemą, naudoti tiek kampinius, tiek prizmės pagrindų vidurių mazgus.

2. Siūlomas baigtinis elementas yra universalus ta prasme, kad jis gali būti naudojamas kelių plokštelių, turinčių skirtingas normales į horizontalų paviršių, jungimui. Jungimo pavyzdžiai parodyti 3 pav. Kai kuriais atvejais gali būti įvedami papildomi mazgai, esantys prizmės daugiakampio pagrinde. Šiuo atveju papildomų mazgų skaičius priklauso nuo norimo skaičiavimo tikslumo.

3. Aišku, kad sandūros zonos dalijimas į baigtinius elementus priklauso nuo jungiamų plokštelių storio.

4. Elementų trūkumus, pvz., papildomi kompiuterio resursai ir kt., kompensuoja jų skaitinis efektyvumas.

LITERATŪRA

- [1] С. С. Варнелите, Д. А. Мацюлявичюс, Призматический конечный элемент для моделирования зон стыка в температурных задачах тонкостенных разветвляющихся и комбинированных конструкций, *Науч. тр. вузов Лит. ССР. Литовский механический сборник*, 29 (Вильнюс, 1987), 86–95.
- [2] S. Varnelytė-Turskienė, Plokštelių sandūros zonų diskretizavimas temperatūrinuose uždaviniuose. *Mechanika*, 3(6) (1996), 9–13.

Models of finite elements in solution of temperature fields' problems

S. Turskienė

The paper deals with ways of modelling the junction zones of thin walled branched structures by finite elements in solving temperature fields' problems.

An adjoint spatial finite element with a rectangular basis is suggested for discretization.

Coordinate transformation and temperature phenomena re-calculation formulas have been obtained. They allow to build a grid of finite elements of the investigated object by using angular as well as middle of the sides of a prism points.

The numerical examples are presented. Present solutions are compared with available control solutions.