LMD konf. darbai, 357–360
1997, Vilnius

Aproksimacijos χ_n^2 pasiskirstymu tikslumo įverčiai

A. Karoblis (VDU)

Nagrinėsime vieną iš pačių paprasčiausiųjų aproksimacijos χ_n^2 pasiskirstymu atvejų.

Sakykime $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$.

Šių dydžių kvadratų sumą pažymėkime $S_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2$, o jos pasiskirstymo funkciją $F_n(x) = P(S_n^2 < x)$.

Tarkime $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ yra nepriklausomų, su normaliuoju standartiniu pasiskirstymu $N(0,1)$ atsitiktinių dydžių seka, o jų kvadratų suma $\chi_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j^2$ su pasiskirstymo funkcija

$$H_n(x) = P(\chi_n^2 < x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt. \tag{1}$$

Įvertinsime sumos S_n^2 pasiskirstymo aproksimacijos χ_n^2 pasiskirstymu $\Delta_n = \sup\limits_x |F_n(x) - H_n(x)|$ tikslumą.

Kai kurie šios aproksimacijos tikslumo įverčiai buvo paskelbti Lietuvoje vykusių mokslinių konferencijų pranešimų tezėse [3, 4]. Šiame straipsnelyje tezėse paskelbti rezultatai yra patikslinti ir pateikiami jų įrodymai.

Neapribodami bendrumo, tarkime, kad atsitiktinių dydžių ξ_j, $j = \overline{1,n}$, vidurkis $\mathbf{M}\xi_j = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}\xi_j = 1$.

Įvesime dar kai kurias charakteristikas: $\kappa_2 = |\mathbf{M}\xi_j^4 - \mathbf{M}\eta_j^4|$, $j = \overline{1,n}$, $\kappa_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^6 |d(F - \Phi)(x)|$, kur $\Phi(x)$ – normaliojo su parametrais (0; 1) pasiskirstymo funkcija, o $F(x) = P(\xi_j < x)$.

TEOREMA 1. *Jei* $\kappa_1 = \mathbf{M}\xi_j^2 - \mathbf{M}\eta_j^2 = 0$, $j = \overline{1,n}$, $\kappa_2 < e^{-1{,}204}$ *ir* $\kappa_3 < \infty$, *tai visiems* $n > 2$ *aproksimacijos įvertis*

$$\Delta_n \leqslant 0{,}918\,\{n(n-1)^{-1}(\kappa_2 + 0{,}382\,(n-1)^{-0{,}5}\kappa_3) + 1{,}401\,\tau^{-1}(n-2)^{-0{,}5}\}, \tag{2}$$

kur $\tau = \min(0{,}5;\ (-2{,}007 - 1{,}667\ln\kappa_2)^{1/2};\ 0{,}420\,\kappa_3^{-1})$.

Pateiktame įvertyje nėra išreikštiniame pavidale eilės dėmenų skaičiaus atžvilgiu. Akivaizdu, kad eilė „n“ atžvilgiu priklauso nuo charakteristikos κ_2 dydžio. Norint gauti liekamajame naryje eilę $n^{-1/2}$, pakanka pareikalauti, kad $\kappa_2 \leqslant n^{-1/2}$.

IŠVADA. *Jei* $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$; $\kappa_3 < \infty, n > 2$ *ir*
1) $\kappa_3 \leqslant 0{,}840$, *tai*

$$\Delta_n \leqslant 0{,}351\, n(n-1)^{-1{,}5}\kappa_3 + 2{,}575(n-2)^{-0{,}5}; \tag{3}$$

2) $\kappa_3 > 0{,}840$, *tai*

$$\Delta_n \leqslant 0{,}351\, \kappa_3 n(n-1)^{-1{,}5} + 3{,}065\,(n-2)^{-0{,}5}\kappa_3. \tag{4}$$

Parodysime, kad šie įverčiai išplaukia iš straipsnio [2] pirmosios teoremos. Pateiksime supaprastintą šios teoremos formuluotę.

Papildomai įvesime kai kuriuos pažymėjimus.

Sakykime $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusiųjų atsitiktinių dydžių seka su bendra charakteringąja funkcija $f_X(t)$;
$G(x,n)$ – kuri nors funkcija,

$$g(t,n) = \int_{R^1} e^{itx} dG(x,n);$$

$g_1(x,n)$ – pagrindinė funkcijos $\sqrt[n]{g(t,n)}$ šaka;

$$\gamma_p(n) = \frac{d^p}{dt^p}\big(f_X(t) - g_1(t,n)\big)\big|_{t=0}, \qquad p = 0, 1, \dots;$$

o $\kappa_r(n)$ – dydis, su kurio reikšme galioja nelygybė

$$\big|f_X(t) - g_1(t,n) - \gamma_0(n) - \dots - \gamma_s(n)(it)^s/s!\big| \leqslant \kappa_r(n)|t|^r/r!, \tag{5}$$

kai $|t| \leqslant T_0$, $s = [r]$ ir $s = r-1$, jei r – sveikas skaičius.

TEOREMA 2. *Jei tenkinamos sąlygos*:

a) *egzistuoja toks skaičius* $b > 0$ *ir dydis* $a(n) > 0$, *kad* $|g(t,n)| \leqslant e^{-na(n)t^2}$, *kai* $|t| < b$;

b) $\gamma_0(n) = \gamma_1(n) = 0$ *ir* $\kappa_3(n) < \infty$,

tai visiems $n > 1$ *ir* τ *reikšmėms, tenkinančioms nelygybes*

$$\begin{cases} \tau \leqslant \min(b, T_0), \\ e^{a(n)\tau^2} \leqslant a(n)(2\,\kappa_2(n)C(2,2))^{-1}, \\ \tau e^{a(n)\tau^2} \leqslant 3\,a(n)(2\,\kappa_3(n)C(3,2))^{-1} \end{cases} \tag{6}$$

$C(p,2) = \max\{p/2;\ (2/p)^{(p-2)/2}\Gamma(p)/\Gamma(p/2)\}$, $p = 2; 3$; *yra teisingas įvertis*

$$\sup_x \left| P\Big(\sum_{j=1}^n X_j < x\Big) - G(x,n)\right| \leqslant 1{,}73\Big\{2\,n\pi^{-1}((2(n-1)a(n))^{-1}\kappa_2(n)$$

$$+ \kappa_3(n)\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)\big((n-1)a(n)\big)^{-3/2}/3! + \pi^{-1}(R(2,\tau) + R(3,\tau)) + 0{,}81\, M(\tau)\Big\},$$

kur

$$R(p,\tau)=\begin{cases}0, & kai\ n\geqslant 1+2a(n)\tau^2/p;\\ (2\kappa_p(n)\tau^p/p!)^n(pn)^{-1}, & kai\ n<1+2a(n)\tau^2/p;\end{cases}$$

ir

$$M(\tau)=3{,}25\,\tau^{-1}\sup_x\left|\frac{d}{dx}G(x,n)\right|.$$

Momentinės charakteristikos $\gamma_p(n)$, $\kappa_3(n)$ ir $a(n)$ nuo n nepriklauso, kai funkcija $G(x,n)$ yra kurio nors pasiskirstymo $G(x)$ n-oji sąsuka, t.y. $G(x,n)=G^{*n}(x)$. Be to, šiuo atveju nelygybė (5) visada yra teisinga, pavyzdžiui, kai

$$\kappa_r(n)=\kappa_r=\int\limits_{R^1}|x|^r|d(F_X-G)(x)|<\infty,$$

kur $F_X(x)=P(X_j<x)$, $j=1,2,\ldots$.

Pirmiausia įvertinsime atsitiktinio dydžio η_j^2 charakteringąją funkciją $h(t)=(1-2it)^{-1/2}$. Jos modulį išskleidus Makloreno eilute

$$|h(t)|=|(1-2it)^{-1/2}|=(1+4t^2)^{-1/4}=1-t^2+\frac{1\cdot 5}{2!}t^4-\frac{1\cdot 5\cdot 9}{3!}t^6+\ldots$$
$$+(-1)^\nu\frac{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4\nu-3)}{\nu!}t^{2\nu}+\ldots,$$

ir prie $|t|\leqslant 2^{-1}$ įvertinus, gauname $e^{-0{,}68t^2}<|h(t)|<e^{-0{,}60t^2}$.

Pasinaudojus gauta nelygybe, randame sumos χ_n^2 charakteringosios funkcijos

$$h_n(t)=(1-2it)^{-n/2}\quad \text{įvertį}\quad |h_n(t)|\leqslant e^{-0{,}60t^2}, \tag{8}$$

kai $|t|\leqslant 2^{-1}$ ir tuo pačiu fiksuojame, kad $a(n)=0{,}60$.

Nagrinėjamuoju atveju, nelygybių sistema (6) įgauna pavidalą

$$\begin{cases}\tau\leqslant 2^{-1},\\ e^{0{,}60\tau^2}\leqslant 0{,}30\,\kappa_3^{-1},\\ \tau e^{0{,}60\tau^2}\leqslant 0{,}49\,\kappa_3^{-1},\end{cases}$$

o jos sprendinys

$$\tau\leqslant\min(0{,}5;\,(-2{,}007-1{,}667\ln\kappa_2)^{1/2};\,0{,}420\kappa_3^{-1}). \tag{9}$$

Kadangi $\tau>0$, tai būtina, kad charakteristika $\kappa_2<e^{-1{,}204}$.

Kai $n>2, a(n)=0{,}60$ ir $\tau\leqslant 2^{-1}$ reiškiniai $R(2,\tau)=R(3,\tau)=0$.

χ_n^2 pasiskirstymo tankis

$$\frac{d}{dx}H_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{n/2-1}e^{-x/2}, & \text{kai } x>0,\\ 0, & \text{kai } x\leqslant 0;\end{cases}$$

maksimumą įgauna taške $x = n - 2$.

Taigi,

$$M(\tau) = \frac{3,25}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\tau}(n-2)^{\frac{n-2}{2}}e^{-\frac{n-2}{2}}$$

$$\leqslant 3,25\,\tau^{-1}\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(n-2)}}, & \text{kai } n \text{ – lyginis,}\\ \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{\pi(n-2)}}\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2}}, & \text{kai } n \text{ – nelyginis}\end{cases}$$

ir galutinai

$$M(\tau) \leqslant 1,625\,\tau^{-1}(\pi(n-2))^{-1/2} = 0,9168\,\tau^{-1}(n-2)^{-1/2}. \tag{10}$$

Remiantis cituota teorema ir (5, 7, 8–10), gauname, kad

$$\Delta_n \leqslant 1,73\Bigg\{2n\pi^{-1}\bigg(\big(1,2(n-1)\big)^{-1}\kappa_2 + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(0,6(n-1)^{-3/2}(3!)^{-1}\kappa_3\right) + 1,316\,\tau^{-1}\big(\pi(n-2)\big)\bigg)^{-1/2}\Bigg\},$$

kur τ reikšmė yra iš (9), o $\kappa_2 < e^{-1,204}$. Atlikę aritmetinius veiksmus, gauname aproksimacijos χ_n^2 pasiskirstymo funkcija įvertį (1).

Išvados teiginys išplaukia iš teoremos, kai $\kappa_2 = 0$ ir dydžio $\tau = \min(0,5;\, 0,42\,\kappa_3^{-1})$ reikšmės parinkimo.

Jei $\kappa_3 \leqslant 0,84$, tai $0,42\,\kappa_3^{-1} \geqslant 0,5$ ir $\tau = 0,5$.

Kai $\kappa_3 > 0,84$, tada $0,42\,\kappa_3^{-1} < 0,5$ ir šiuo atveju $\tau = 0,42\,\kappa_3^{-1}$.

LITERATŪRA

[1] Г. Крамер, *Математические методы статистики*, Мир, Москва, 1975.

[2] А. Кароблис, Аппроксимация функций распределения сумм независимых случайных величин, *Liet. Mat. Rink.*, **25**(2), (1985).

[3] А. Кароблис, В. Винцявичене, *Об аппроксимации распределением* χ_n^2, Тезисы XXVIII конференции ЛМО, Вильнюс, 1987,

[4] А. Кароблис, В. Винцявичене, *Математика и математическое моделирование*, Вильнюс, 1987.

The approximation of accuracy to the χ_n^2 distribution function

A. Karoblis

The approximation of accuracy of distribution function of the sum independent and indentically distributed random variables to the χ_n^2 distribution function is considered.